Tiago Coelho

A Integral de Lebesgue

Florianópolis

2017

Tiago Coelho

A Integral de Lebesgue

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientador: Dr. Matheus Cheque Bortolan

Florianópolis, Novembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

TIAGO COELHO

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Aldrovando Luís Araújo Azeredo
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Danilo Royer
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, 16 de novembro de 2017

Dedico este trabalho ao ser mais importante que já existiu, que existe e que existirá, ao ser que me formou, que me trouxe a existência, ao ser mais amável, mais santo, mais poderoso, mais compassivo, mais misericordioso, mais justo, dedico ao ser ao qual não existem palavras capazes de descrever o tamanho de sua grandiosidade. Sendo assim dedico ao meu DEUS na pessoa do Pai, dedico ao meu DEUS na pessoa de JESUS CRISTO, o filho, e dedico ao meu DEUS na pessoa do Espirito Santo. Também dedico a pessoa mais importante que mora neste universo,a minha mãe, Dna Adriana Nadir Severino, mulher responsável que até aqui tem me criado e educado, mulher que até aqui tem me acompanhado e apoiado em minhas decisões.

Agradecimentos

Não existem palavras suficientes conhecidas capazes de expressar minha gratidão aos envolvidos por esta conquista, mas quero destacar aqui e registrar nos anais da história pessoas que me apoiaram, incentivaram e contribuiram pora eu ter conseguido chegar até aqui.

O espaço maior nesse agradecimento deve ser reservado para aquele com maior relevância nessa conquista, e este é meu DEUS ao qual tem me acompanhado desde a fundação do mundo, e este tem me guardado, protegido, guiado por onde devo ir, e seguindo ele até aqui consegui chegar, e jamais chegaria se com ele não estivesse. Por isso agradeço a ele por ter me escolhido, por ter me salvado, por me amar, mesmo eu não merecendo esse amor, para resumir agradeço a DEUS por tudo, pois se for ficar aqui destacando motivos pelo qual devo agradecer a DEUS faltariam palavras para tal.

O segundo espaço com maior destaque aqui é para minha mãe, dona Adriana Nadir Severino, mulher que em muito se sacrificou para que eu pudesse chegar aqui, ela que muitas noites de sono perdeu preocupada com a saúde de seus filhos, ela que muitas vezes ficou sem comer para que seus filhos pudessem comer, ela sim é a pessoa neste universo tão vasto, mais importante que existe na minha vida.

Quero aqui agradecer os professores Erivaldo Carvalho e Rogério Carvalho(Baiano), meus patrões no Centro de Estudos Matemáticos(CEM), mensionando eles mensiono toda equipe do CEM, pessoas que me deram a oportunidade de evoluir como profissional, incentivaram a conduzir minha profissão com amor, pelo prazer de fazer o bem. Sem dúvida que se não fosse os recursos financeiros ali adquiridos até aqui não teria chego.

Quero aqui destacar meus amigos em especial William de Sousa e sua esposa Ana Ester que são amigos, conselheiros, incentivadores, e que até aqui têm acompanhado e ajudado em momentos difíceis. Outra colega que merece destaque aqui é Thaís Leite, com quem cursei junto uma grande gama de disciplinas, onde estivemos sempre unidos e um ajudando o outro, também quero aqui agradecer ao Agnaldo Aroldo Pereira que também é um amigo, conselheiro, brother e um grande parceiro de profissão.

Agradesso aos professores com quem tive aula, e em especial o Professor Matheus Cheque Bortolan, o mesmo que me orientou na execução deste trabalho, e também foi grande companheiro no decorrer das disciplinas na universidade.

Em fim, provavelmente devo ter esquecido vários nomes, várias pessoas especiais na minha vida e que me auxiliaram até aqui, então desde já peço desculpas a você que foi, e é importante nesta conquista e infelizmente não me lembrei de você no momento de escrever este agradecimento.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos o conceito da Integral de Lebesgue e algumas de suas aplicações, com ênfase nas aplicações ao Cálculo e à Análise Matemática, como por exemplo, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Também apresentaremos a comparação da integral de Lebesgue com a integral de Riemann.

Palavras-chave: integral de Lebesgue, funções mensuráveis, medida, integral de Riemann.

Abstract

In this work we present the concept of the Lebesgue's Integral and some of its applications, with emphasis on applications to Calculus and Mathematical Analysis, such as Lebesgue's Dominated Convergence Theorem. There is also a comparison between Lebesgue's Integral and Riemann's Integral.

Keywords: Lebesgue's Integral, measurable functions, measure, Riemann's Integral.

Sumário

1 Introdução

O cálculo diferencial e integral como conhecemos e estudamos na graduação em matemática, foi pela primeira vez formalizado por Bernhard Riemann (1826-1866). Entretanto Riemann não foi o primeiro a trabalhar com essa teoria. Eudoxo (408-355 a.C) e Arquimedes (287-212 a.C) desenvolveram o método da exaustão para o cálculo da área de uma figura dada, aproximando-a por áreas de figuras já conhecidas. Esse método foi evoluindo ao decorrer dos séculos, com alguns matemáticos e físicos o aprimorando.

Não pode-se aqui esquecer de Isaac Newton (1642-1727) e Göttfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), homens que entraram para história por terem inventado o cálculo infinitesimal, também conhecido como cálculo diferencial e integral. Entretanto nem tudo que reluz é ouro, por mais que se tenha desenvolvido o cálculo infinitesimal, ainda restaram alguns problemas com a integral de Riemann, e dentre esses problemas, a existência de uma grande quantidade de funções que não são integraveis no sentido de Riemann, bem como a dificuldade em obter-se proposições que envolvem limites de sequências de funções, sendo muito difíceis de se provar quando obtidas.

Surge então em 1902 uma tese de doutorado do matemático francês chamado Henri Léon Lebesgue (1875-1941) que propunha uma generalezação da ideia da integral de Riemann, baseando-se nos trabalhos de Émile Borel e Camille Jordan, dando origem assim a teoria da medida e integral de Lebesgue. Lebesgue foi matemático, pesquisador e professor, e ganhou diversos prêmios ao longo da carreira.

A integral de Lebesgue aparece para fazer com que essas fraquezas desapareçam, por exemplo quantidade de funções que pode-se integrar, mas com um pequeno revés: a definição da integral Lebesgue requer uma boa quantidade de conceitos prévios bastante abstratos, que podem ser razoavelmente complicados à primeira vista, e se desapegam da intuição matemática, que é tão presente na integral de Riemann.

Uma analogia lúdica entre estes dois conceitos de integrais é o seguinte: temos um cofre com moedas de real e queremos contá-las. Temos pelo menos as duas maneiras abaixo descritas para descobrir o valor total no cofre:

(a) Vamos retirando uma a uma as moedas e vamos somando seus valores a cada moeda retirada;

(b) Retiramos todas as moedas de uma vez, agrupamos as moedas de acordo com seus valores, em blocos de moedas de 1 centavo, 5, 10, 25, 50 centavos e de um real. Contamos a quantidade de moedas em cada um dos grupos, multiplicamos a quantidade pelo valor do bloco e somamos os resultados.

A maneira (a) é mais simples de se explicar, mas ela levará muito mais tempo do que a forma (b), principalmente se tivermos muitas moedas no cofre. A maneira (a) corresponde à integral de Riemann, enquanto a maneira (b) corresponde à integral de Lebesgue, e esta última é mais eficiente que a primeira, embora elas neste caso produzam o mesmo resultado.

Esta generalização vai permitir que "contemos" muito mais coisas, isto é, que sejamos capazes de estender a classe das funções integráveis. Um exemplo simples de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é integrável no sentido de Lebesgue mas não no sentido de Riemann é:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.1}$$

e veremos que a integral de Lebesgue é bastante mais eficiente que a integral de Riemann, tal como os processos de contagem descritos acima, e veremos também funções integráveis no sentido de Riemann também são integráveis no sentido de Lebesgue, e ambas as integrais fornecem o mesmo valor.

A necessidade do estudo da Teoria de Medida e Integração é essencial para a boa formação de um matemático, esteja ele disposto a seguir na área de Análise ou não. O primeiro passo nesse estudo, que é introduzido aos estudantes de matemática assim que entram em qualquer universidade, é a *integral de Riemann*, por se apresentar com facilidade e por ter bastante aplicações.

Esta extensão do conceito de integral tem outras inúmeras vantagens práticas, algumas das quais serão apresentadas neste trabalho, que seguirá a teoria como apresentada em [3].

2 Teoria da Medida

Começaremos a construir nossa teoria dos conceitos mais básicos aos mais avançados, e isto justifica o próximo capítulo onde serão abordadas as funções de conjuntos, base da teoria da integral de Lebesgue.

2.1 Funções de conjuntos

Nossa primeira definição é a definição de *anel*, que não é estranha entre matemáticos e nem para os alunos de graduação, no entanto esta definição de *anel* não é a mesma que costuma-se ver nas disciplinas de álgebra. Vejamos:

Definição 2.1. *Uma família $\mathcal{R}$ de conjuntos constitui um* ***anel*** *se, para $A \in \mathcal{R}$ e $B \in \mathcal{R}$ valem:*

i) $A \cup B \in \mathcal{R}$,

ii) $A - B \in \mathcal{R}$.

Note que, como $A \cap B = A - (A - B)$, temos também $A \cap B \in \mathcal{R}$, se $\mathcal{R}$ é um anel.

Definição 2.2. *Diz-se que um anel $\mathcal{R}$ é um* ***σ-anel*** *se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, para $A_n \in \mathcal{R}$ e $n = 1, 2, 3, ...$*

Note que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)$ temos então que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, se $\mathcal{R}$ é um σ-anel.

Exemplo 2.3.

(a) *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X, isto é, a coleção formada por todos os subconjuntos de X. Então $\mathcal{R}$ é um σ-anel.*

(b) *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} = \{\varnothing, X\}$. Então $\mathcal{R}$ é um σ-anel.*

(c) *Sejam $X = \mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ a coleção dos intervalos da forma (a, ∞) para $a \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{R}$ <u>não é</u> um anel, pois se $a < b$ então $(a, \infty) - (b, \infty) = (a, b]$, que não está em $\mathcal{R}$.*

(d) *Sejam X um conjunto infinito e $\mathcal{R}$ a coleção de todos os subconjuntos finitos de X e mais o conjunto vazio. Então $\mathcal{R}$ é um anel, mas <u>não é</u> um σ-anel, pois união enumerável de conjuntos finitos pode não ser finita.*

Antes de continuarmos, lembremos rapidamente do conjunto dos *números reais estendido*. O conjunto $\mathbb{R}_\infty$ formado por todos os números reais juntamente com os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ forma o **conjunto dos números reais estendido**. Neste conjunto, definimos as operações de soma e multiplicação usuais entre números reais, e colocamos

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

e também

$$x \cdot (+\infty) = +\infty \text{ se } x > 0 \quad \text{e} \quad x \cdot (+\infty) = -\infty \text{ se } x > 0,$$

e analogamente

$$x \cdot (-\infty) = -\infty \text{ se } x > 0 \quad \text{e} \quad x \cdot (-\infty) = +\infty \text{ se } x > 0.$$

Definimos também uma relação de ordem em $\mathbb{R}_\infty$ como sendo a usual para elementos de $\mathbb{R}$ e colocamos

$$-\infty < x < +\infty \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Note que os valores $+\infty + (-\infty)$ e $0 \cdot \infty$ não estão definidos, e são chamados de **indeterminações**. Agora sim definiremos o que é uma função de conjuntos.

Definição 2.4. *Dizemos que φ é uma* ***função de conjuntos*** *definida em $\mathcal{R}$, se φ associa a cada $A \in \mathcal{R}$ um número $\varphi(A)$ do conjunto dos números reais estendido $\mathbb{R}_\infty$. Dizemos ainda que φ é* ***aditiva*** *se para $A \cap B = \varnothing$ vale que $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.*

Dizemos que φ é ***enumeravelmente aditiva*** *(ou σ-**aditiva**) se para $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ vele que $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$*

Observação 2.5. *Para que não tenhamos problemas com indefinições, vamos trabalhar com funções de conjuntos φ que não atijam simultaneamente $+\infty$ e $-\infty$. Também iremos desconsiderar funções de conjuntos que só atinjam $+\infty$ ou $-\infty$, já que seriam funções constantes, e não teríamos muito o que fazer.*

Exemplo 2.6. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Defina a função de conjuntos φ em R por*

$$\varphi(A) = \begin{cases} \#A, & \textit{se } A \textit{ for finito}, \\ \infty, & \textit{se } A \textit{ for infinito}, \end{cases}$$

onde $\#A$ é o número de elementos do conjunto A, caso A seja finito. Essa função é chamada de ***função contagem****, e é enumeravelmente aditiva.*

Exemplo 2.7. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} = \{\varnothing, X\}$. Defina*

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & \textit{se } A = \varnothing \ . \\ 1, & \textit{se } A = X, \end{cases}$$

Neste caso, φ também é uma função σ-aditiva.

Exemplo 2.8. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$. Fixe $x_0 \in X$ e defina*

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & se\ x_0 \notin A\ . \\ 1, & se\ x_0 \in A, \end{cases}$$

Esta é a chamada ***medida de Dirac*** *relativa à x_0. Temos φ enumeravelmente aditiva. De fato, sabemos que $\mathcal{R}$ é um σ-anel, e se $A_n \in \mathcal{R}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ são tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, temos duas opções:*

- *$x_0 \notin A_n$ para todo n, e assim $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, o que nos dá $\varphi(A_n) = 0$ para todo n e assim*
$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$
- *existe n_0 tal que $x_0 \in A_{n_0}$, e neste caso, como $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, temos $x_0 \notin A_j$ para todo $j \neq n_0$. Portanto $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, e*
$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Vejamos agora algumas propriedades sobre funções de conjuntos, que nos auxiliarão na demonstração de resultados importantes no decorrer deste trabalho.

Proposição 2.9. *Se φ é aditiva, as seguintes propriedades são verificadas:*

(1) $\varphi(\varnothing) = 0$.

(2) $\varphi(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \varphi(A_3) + \ldots + \varphi(A_n)$ *se* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *para* $i \neq j$.

(3) $\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$.

(4) *Se $\varphi(A) \geqslant 0$ para todo A, e se $A_1 \subset A_2$, então $\varphi(A_1) \leqslant \varphi(A_2)$.*

(5) $\varphi(A - B) = \varphi(A) - \varphi(B)$ *se $B \subset A$ e $|\varphi(B)| < \infty$.*

Demonstração:

De (1) Perceba que $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ e $\varnothing = \varnothing \cap \varnothing$. Então $\varphi(\varnothing) = \varphi(\varnothing \cup \varnothing) = \varphi(\varnothing) + \varphi(\varnothing)$, pois φ é aditiva. Temos então três possibilidades $\varphi(\phi) = 0$, ou $\varphi(\varnothing) = +\infty$, ou $\varphi(\varnothing) = -\infty$.

Mas note que se $\varphi(\phi) = \infty$, teríamos $\varphi(A) = \varphi(A \cup \varnothing) = \varphi(A) + \varphi(\varnothing)$. Segue então que $\varphi(A) = \infty$ para todo A, caso que descartamos (pela Observação 2.5). Analogamente para o caso $\varphi(\varnothing) = -\infty$ e portanto temos $\varphi(\phi) = 0$.

De (2) Para $n = 2$ temos da definição de função de conjuntos aditiva que $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$ se $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Suponhamos por indução sobre n que vale para k, com $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, isto é,

$$\varphi(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + ... + \varphi(A_k),$$

e seja $A = A_1 \cup ... \cup A_k$. Se $A_{k+1} \cap A_i = \varnothing$ para $k+1 \neq i$ segue que $\varphi(A \cup A_{k+1}) = \varphi(A) + \varphi(A_{k+1})$ e portanto $\varphi(A_1 \cup ... \cup A_{k+1}) = \varphi(A_1) + ... + \varphi(A_{k+1})$, o que conclui a inducão.

De (3) Defina $P = A_1 - A_2$ e $G = A_2 - A_1$. Note que $A_1 \cup A_2 = P \cup A_2$, $A_2 \cap P = \varnothing$, $A_1 \cup A_2 = G \cup A_1$ e $A_1 \cap G = \varnothing$.

Segue então que $\varphi(P \cup A_2) = \varphi(P) + \varphi(A_2)$ e $\varphi(G \cup A_1) = \varphi(G) + \varphi(A_1)$. Perceba ainda que $A_1 \cup A_2 = P \cup G \cup (A_1 \cap A_2)$ e que $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(G \cup A_1) - \varphi(A_1) + \varphi(P \cup A_2) - \varphi(A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2)$.

Portanto $\varphi(A_1) + \varphi(A_2) = \varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2)$.

De (4) Temos da hipótese que $A_1 \subset A_2$, então $A_2 = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$. Então $\varphi(A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - A_1)$, já que $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \varnothing$.

Se $\varphi(A_1) = +\infty$ então claramente $\varphi(A_2) = +\infty$, e assim $\varphi(A_1) \leqslant \varphi(A_2)$. Agora, se $\varphi(A_1) < +\infty$, como $\varphi(A_2 - A_1) \geqslant 0$, temos $\varphi(A_1) \leqslant \varphi(A_2)$.

De (5) Como $B \subset A$ temos $A = B \cup (A - B)$. Então $\varphi(A) = \varphi(B \cup (A - B))$ e como $B \cap A - B = \varnothing$, segue que $\varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(A - B)$.

Assim, se $\varphi(A) = +\infty$ como $|\varphi(B)| < \infty$, segue que $\varphi(A - B) = +\infty$ e $\varphi(B - A) = +\infty$. Logo, nesse caso, $\varphi(A - B) = \varphi(A) - \varphi(B)$. Agora, se $|\varphi(A)| < +\infty$ então $|\varphi(A - B)| < \infty$ e temos $\varphi(A - B) = \varphi(A) - \varphi(B)$. ■

Nosso próximo teorema vai mostrar que uma função enumeravelmente aditiva se comporta bem quando um conjunto é a união enumerável de conjuntos encaixados, isto é, $A_n \subset A_{n+1}$.

Teorema 2.10. Suponhamos que φ seja σ-aditiva em um anel $\mathcal{R}$. Suponhamos ainda $A_n \in \mathcal{R}$ para $n = 1, 2, ..., n$, com $A_1 \subset A_2 \subset ...$ e ainda suponha que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Então temos $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$ quando $n \to \infty$.

Demonstração: Defina $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_3 = A_3 - A_2$,..., $B_n = A_n - A_{n-1}$, para $n = 2, 3, ...$ Note que $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Segue que $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ e ainda

$$\varphi(A_n) = \varphi\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(B_i). \tag{2.1}$$

Note que da σ-aditividade de φ, temos $\varphi(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i)$, e assim, fazendo $n \to \infty$ em (2.1) temos $\varphi(A_n) \to \varphi(A)$ quando $n \to \infty$. ■

2.2 Medida de Lebesgue

Nesta seção vamos definir uma função de conjuntos particular, que chamaremos de *medida*. Para tanto iremos apresentar alguns conceitos.

Definição 2.11. *Representaremos por $\mathbb{R}^p$ o espaço euclidiano p-dimensional. Designaremos por **intervalo** em $\mathbb{R}^p$ um conjunto de pontos $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ tal que $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ para $i = 1, 2, ..., p$.*

Consideraremos também um intervalo, se trocarmos alguns ou todos dos $\leqslant$ por $<$. Também consideraremos o caso onde $a_i = b_i$ para alguns ou todos $i = 1, ..., p$.

Definição 2.12. *Se um conjunto A é a reunião de um número finito de intervalos, dizemos que A é um **conjunto elementar**.*

Agora definiremos a função de conjuntos sobre todos os conjuntos elementares.

Definição 2.13. *Se I é um intervalo, definimos*

$$m(I) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i).$$

Se $A = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ e $I_i \cap I_j = \varnothing$ para $i \neq j$, definimos

$$m(A) = m(I_1) + m(I_2) + ... + m(I_n).$$

*A função de conjuntos m será chamada de **medida de Lebesgue** para conjuntos elementares em $\mathbb{R}^p$.*

Em $\mathbb{R}$, a medida de Lebesgue de um intervalo é o comprimento dele. Em $\mathbb{R}^2$, é a área do retângulo. Em $\mathbb{R}^3$ é o volume do paralelepípedo.

Considere $\mathcal{E}$ como a família de todos os conjuntos elementares de $\mathbb{R}^p$. Para compreender melhor a definição acima, temos algumas propriedades de $\mathcal{E}$ e m.

Proposição 2.14.

(1) *$\mathcal{E}$ é um anel, porém não é um σ-anel.*

(2) *Se $A \in \mathcal{E}$, então A é a reunião de um número finito de intervalos disjuntos.*

(3) *Se $A \in \mathcal{E}$, $m(A)$ fica bem definida, isto é, duas decomposições distintas de A em intervalos disjuntos dão origem ao mesmo valor de $m(A)$.*

(4) *m é aditiva em $\mathcal{E}$.*

(5) *m é invariante por translações, isto é, se $A \subset \mathcal{E}$, $x \in \mathbb{R}^p$ e $A + x = \{a + x \colon a \in A\}$ então $m(A + x) = m(A)$.*

Demonstração:

De (1) Sejam $X, Y \in \mathcal{E}$, ou seja, $X = \bigcup_{i=1}^{n} I_n$ e $Y = \bigcup_{j=1}^{k} J_k$, sem perda de generalidade suponha $n \geqslant k$. Claramente $X \cup Y$ é a união de intervalos, e portanto é um conjunto elementar, isto é $X \cup Y \in \mathcal{E}$.

Para a diferença, assuma primeiramente que $X = I$ e $Y = J$ são intervalos em $\mathbb{R}^p$, isto é,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^p \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, ..., p\} \text{ e } Y = \{x \in \mathbb{R}^p \colon c_i \leqslant x_i \leqslant d_i\ i = 1, ..., p\},$$

onde $\leqslant$ pode ser trocado por $<$ em qualquer (ou quaisquer) ocorrência(s). Assim

$$X - Y = \{x \in \mathbb{R}^p \colon a_i \leqslant x_i < \min\{b_i, c_i\}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^p \colon\ \max\{d_i, a_i\} < x_i \leqslant b_i\} \in \mathcal{E}.$$

Também $X \cap Y = \{x \in \mathbb{R}^p \colon\ \max\{a_i, c_i\} \leqslant x \leqslant \min\{b_i, d_i\},\ i = 1, ..., p\} \in \mathbb{R}$. Agora no caso geral, basta notar que

$$X - Y = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{j} (I_n \cap J_m),$$

e usar o caso anterior. Com isso temos $\mathcal{E}$ um anel, mas não um σ-anel, pois a união enumerável de intervalos pode não gerar um conjunto elementar, como por exemplo $\mathbb{R}^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, onde $I_n = \{x \in \mathbb{R}^p \colon\ -n \leqslant x \leqslant n\}$.

De (2) Provemos por indução sobre n. Se $X = I \cup J$, então escreva $X = (I - J) \cup (I \cap J) \cup (J - I)$. E assim, do item (1), podemos escrever $X - Y$ como a união de intervalos disjuntos.

Suponha que seja verdade para k. Se $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} I_i$, seja $Y = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$. Então Y é a união de intervalos disjuntos, $Y = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ e $X = Y \cup I_{k+1}$. Aplicando o caso acima sabemos que $J_k \cup I_{k+1}$ pode ser escrito como união de intervalos disjuntos. Como J_k é disjunto de J_j para $j = 1, ..., k - 1$, o resultado segue.

De (3) Sejam $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ e $A = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$ duas decomposições distindas de $A \in \mathcal{E}$ em intervalos disjuntos. Defina assim $E_{i,j} = I_i \cap J_j$ para $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$. Notemos que $I_i = \bigcup_{j=1}^{m} E_{i,j}$, $J_j = \bigcup_{i=1}^{n} E_{i,j}$ e $A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{J=1}^{m} E_{i,j}$. Lembrando que cada $E_{i,j}$ é, no máximo, a união de dois intervalos disjuntos, temos:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m(E_{i,j}),$$

e

$$m(A) = \sum_{j=1}^{m} m(J_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m(E_{i,j}).$$

Portanto decomposições disjuntas de A continuam tendo a mesma medida, e com isso m fica bem definida.

De (4) Se $A, B \in \mathcal{E}$ com $A \cap B = \varnothing$, então $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ e $B = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, onde todos os intervalos são disjuntos entre si (mesmo os de A comparados aos de B, já que $A \cap B = \varnothing$). Assim $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, e então da Definição 2.13 segue que

$$m(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i) + \sum_{j=1}^{m} (J_j) = m(A) + m(B),$$

o que mostra que m é uma função de conjuntos aditiva.

De (5) Note que se I é um intervalo e $x \in \mathbb{R}^p$ então

$$m(I + x) = \prod_{i=1}^{p} ((b_i + x_i) - (a_i + x_i)) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i) = m(I),$$

e o caso geral é imediato. ■

Continuidade é um conceito bastante desejado para funções, e teremos uma versão para continuidade para funções de conjuntos, que chamaremos de *regularidade*.

Definição 2.15. *Dizemos que uma função de conjuntos aditiva e não-negativa definida em $\mathcal{E}$ é **regular** se a seguinte condição é verificada: para cada $A \in \mathcal{E}$ e para $\epsilon > 0$ existem conjuntos $F, G \in \mathcal{E}$ tais que F é fechado, G é aberto, $F \subset A \subset G$ e*

$$\varphi(G) - \epsilon \leqslant \varphi(A) \leqslant \varphi(F) + \epsilon. \tag{2.2}$$

Exemplo 2.16. *A medida de Lebesgue m sobre $\mathcal{E}$ (Considere $\mathcal{E}$ neste exemplo como o anel que contém todos os conjuntos elementares de $\mathbb{R}$.) é regular.*

De fato, já sabemos que m é aditiva e note que m é não negativa, pois $m(A) = m(I_1) + m(I_2) + ... + m(I_n)$, onde $I_i = \{x \in \mathbb{R}; a_i \leqslant x \leqslant b_i\}$, e $b_i - a_i \geqslant 0$, pois $b_i \geqslant a_i$. Segue então que $m(I_i) \geqslant 0$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Ou seja $m(A) \geqslant 0$, para todo $A \in \mathcal{E}$.

Para mostrar a última condição de regularidade de m, seja $\epsilon > 0$ dado. Separaremos alguns casos particulares:

<u>Caso 1:</u> Se $A = \{a\}$ para algum $a \in \mathbb{R}$, tome $F = \{a\}$ e $G = (a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2})$.

<u>Caso 2:</u> Se $A = [a, b]$ para $a < b$, tome $F = [a, b]$ e $G = (a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2})$.

<u>Caso 3:</u> Se $A = (a, b)$, tome $F = [a - \frac{\epsilon}{2}, b - \frac{\epsilon}{2}]$ e $G = (a, b)$.

<u>Caso 4:</u> Se $A = [a, b)$ (o caso $A = (a, b]$ é análogo), tome $F = [a, b - \epsilon]$ e $G = (a - \epsilon, b]$.

Para o caso geral, escreva $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$, como união de intervalos disjuntos. Cada I_i é um intervalo em um dos Casos 1 a 4, e assim para cada I_i, existem F_i fechado e G_i aberto tais que $F_i \subset I_i \subset G_i$ tais que $\phi(G_i) - \frac{\epsilon}{m} \leqslant \phi(I_i) \leqslant \phi(F_i) - \frac{\epsilon}{m}$. Notemos que os F_i são disjuntos, pois os I_i são disjuntos e $F_i \subset I_i$. Defina $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$, que é fechado pois é uma união finita de fechados, e defina também $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_i$ que é aberto, pois G_i é aberto para cada i. Assim $F \subset A \subset G$ e

$$m(A) = \sum_{i=1}^{m} m(I_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (m(F_i) + \frac{\epsilon}{m}) = m(F) + \epsilon$$

e também

$$m(G) = \sum_{i=1}^{m} m(G_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (m(I_i) + \frac{\epsilon}{m}) = \phi(A) + \epsilon,$$

o que mostra a regularidade de m em $\mathbb{R}$. Aplicando este resultado para cada coordenada, obtemos a regularidade de m em $\mathbb{R}^p$.

Nosso próximo passo é mostrar que toda função de conjuntos regular em $\mathcal{E}$, pode ser estendida a uma função de conjuntos σ-aditiva em um σ-anel que contém $\mathcal{E}$. Para isso, veremos primeiro como estender uma função de conjuntos μ para todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^p$.

Definição 2.17. *Seja μ uma função de conjuntos aditiva, não-negativa, regular e finita em $\mathcal{E}$. Se $E \subset \mathbb{R}^p$, definimos*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \colon E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ e } A_n \text{ é um aberto em } \mathcal{E} \right\}.$$

O valor $\mu^*(E)$ é chamado de ***medida exterior*** *de E correspondente à μ. A função μ^* é chamada de* ***medida exterior*** *associada à μ.*

Um exemplo de tal μ é a medida de Lebesgue m, e neste caso m^* é chamada de **medida exterior de Lebesgue**.

Observação 2.18. *Note que como a medida m é invariante por translações, então a medida m^* é também invariante por translações.*

Proposição 2.19. *Temos $\mu^*(E) \geqslant 0$ para todo $E \subset \mathbb{R}^p$, e se $E_1 \subset E_2$ então $\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$.*

Demonstração: Como μ é não-negativa, segue claramente que μ^* é também não-negativa. Para a segunda parte, note que se $E_1 \subset E_2$, então toda cobertura de E_2 por abertos elementares também cobre E_1, e portanto $\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$. ∎

Nosso próximo teorema vai nos mostrar que não existe diferença em calcular a medida μ ou a medida exterior μ^* de um conjunto elementar.

Teorema 2.20. Seja μ uma função de conjuntos aditiva, regular, não-negativa e finita em $\mathcal{E}$. Então:

(a) para cada $A \in \mathcal{E}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$;

(b) Se $E \subset \mathbb{R}^p$, $E_n \subset \mathbb{R}^p$ para cada $n = 1, 2, 3, ...$ e $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, então $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Demonstração:

De (a) Como $A \in \mathcal{E}$ e μ é regular, então dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto aberto elementar G tal que $A \subset G$ e $\mu(G) \leqslant \mu(A) + \epsilon$. Ainda como G é uma cobertura aberta para A temos $\mu^*(A) \leqslant \mu(G)$, e assim $\mu^*(A) \leqslant \mu(A) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A).$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, da definição de μ^* segue que existe uma cobertura $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ de A por conjuntos elementares abertos tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu^*(A) + \frac{\epsilon}{2}$, já que $\mu^*(A)$ é o ínfimo sobre todas as coberturas de A por conjuntos elementares abertos.

Da regularidade de μ, como $A \in \mathcal{E}$, existe $F \subset A$, com F fechado (e portanto compacto) tal que $\mu(F) \geqslant \mu(A) - \frac{\epsilon}{2}$. Como $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ e $F \subset A$ é compacto, então existe N tal que $F \subset A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N$ (pois F é compacto). Segue então que

$$\mu(A) \leqslant \mu(F) + \epsilon \leqslant \mu(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_N) + \epsilon,$$

e assim,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) + \epsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \epsilon \leqslant \mu^*(A) + 2\epsilon,$$

o que implica que $\mu(A) \leqslant \mu^*(A) + 2\epsilon$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$, e portanto podemos concluir que $\mu(A) = \mu^*(A)$.

De (b) Suponha agora que $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_n$ e que $\mu^*(E_n) < \infty$ para todo n. Dado $\epsilon > 0$, da definição de μ^*, existem coberturas $\{A_{n,k}\}$ com $k = 1, 2, 3, ...$ de abertos elementares, tais que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \text{ para cada } n \geqslant 1.$$

Então $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon$, ou seja $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

No caso em que $\mu^*(E_n) = \infty$ para algum n, a afirmação é trivial. ■

Note que (a) nos mostra que μ^* é uma extensão de μ para a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^p$. Para continuar, vamos definir uma noção de convergência para conjuntos.

Definição 2.21. *Para $A, B \subset \mathbb{R}^p$, definimos:*

(i) $S(A, B) = (A - B) \cup (B - A)$.

(ii) $d(A, B) = \mu^*(S(A, B))$.

Escrevemos $A_n \to A$, e diremos que A_n ***converge*** *para A, se $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$*

Exemplo 2.22. *Seja $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ para $n = 1, 2, 3, ...$ e $A = 0$.*

Vejamos algumas importantes propriedades de $S(\cdot, \cdot)$ e $d(\cdot, \cdot)$.

Proposição 2.23. *Temos:*

(1) $S(A, B) = S(B, A)$ *e* $S(A, A) = \varnothing$.

(2) $S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(B, C)$.

(3) $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, $S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)$, $S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \subset S(A_1, B_1) \bigcup S(A_2, B_2)$.

(4) $d(A, B) = d(B, A)$ *e* $d(A, A) = 0$.

(5) $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$.

(6) $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)$, $d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.

(7) $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant d(A, B)$, *se pelo menos um dos dois números $\mu^*(A)$, $\mu^*(B)$ for finito.*

Demonstração:

De (1) Temos $S(A, A) = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ e $S(A, B) = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = S(B, A)$. Com isso (1) fica demonstrada.

De (2) Tome $x \in S(A,B)$, isto é, $x \in A - B$ ou $x \in B - A$. Se $x \in A - B$ então $x \in A$ e $x \notin B$. Temos duas possibilidades para x: ou $x \in C$ ou $x \notin C$. Se $x \in C$ então $x \in C - B$, já se $x \notin C$ temos $x \in A - C$, e assim $x \in (A - C) \cup (C - B)$. Para $x \in B - A$ obtemos analogamente $x \in (C - A) \cup (B - C)$, ou seja, $x \in S(A,C) \bigcup S(B,C)$ e (2) fica demonstrada.

De (3) Faremos a demonstração somente para $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, pois os outros casos se analisam analogamente. Tome $x \in S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$, ou seja, $x \in [A_1 \cup A_2 - B_1 \cup B_2] \bigcup [B_1 \cup B_2 - A_1 \cup A_2]$. Segue que $x \in (A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)$ ou $x \in (B_1 \cup B_2) - (A_1 \cup A_2)$. Se $x \in (A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2)$ temos $x \in A_1$ ou $x \in A_2$ e $x \notin B_1$ e $x \notin B_2$, isto é $x \in A_1$ e $x \notin B_1$ ou $x \in A_2$ e $x \notin B_2$, então $x \in (A_1 - B_1)$ ou $x \in (A_2 - B_2)$, sendo assim $x \in S(A_1, B_1)$ ou $x \in S(A_2, B_2)$ o que implica $x \in S(A_1, B_1) \bigcup S(A_2, B_2)$. Do mesmo modo se $x \in (B_1 \cup B_2) - (A_1 \cup A_2)$ temos $x \in S(A_1, B_1) \bigcup S(A_2, B_2)$, então em ambos os casos $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subset S(A_1, B_1) \bigcup S(A_2, B_2)$. Com isso (3) fica demonstrada.

De (4) Segue de (1).

De (5) Como $S(A,B) \subset S(A,C) \cup S(C,B)$, por (2), segue que $\mu^*(S(A,B)) \leqslant \mu^*(S(A,C) \cup S(C,B))$. Pela Proposição 2.19, segue então que $\mu^*(S(A,B)) \leqslant \mu^*(S(A,C) + \mu^*(S(C,B))$. Com isso $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$ e portanto (5) fica demonstrada.

De (6) Faremos a demonstração de $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$, os demais casos ficam a critério do leitor. Por (3) temos $S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subset S(A_1, B_1) \bigcup S(A_2, B_2)$, então $\mu^*(S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)) \leqslant \mu^*(S(A_1, B_1) \bigcup S(A_2, B_2))$ o que implica em $\mu^*(S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)) \leqslant \mu^*(S(A_1, B_1)) + \mu^*(S(A_2, B_2))$. Segue então que $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$ e com isso (6) fica demonstrada.

De (7) Como $\mu^*(A)$ ou $\mu^*(B)$ é finito, considemos o seguinte caso $0 \leqslant \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A)$. O caso em que $0 \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ fica a critério do leitor a demonstração. Por (5) temos $d(A, \varnothing) \leqslant d(A,B) + d(B, \varnothing)$, isto é, $\mu^*(A) \leqslant d(A,B) + \mu^*(B)$ e como $\mu^*(B)$ é finita neste caso, segue que $\mu^*(A) - \mu^*(B) \leqslant d(A,B)$. Então $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant d(A,B)$. ∎

Observação 2.24. *Note que $d(\cdot,\cdot)$ é essencialmente uma função distância. A propriedade que falta para que d seja realmente uma distância é que $d(A,B) = 0$ se e só se $A = B$.*

Note que esta propriedade não está satisfeita em geral, pois se A é um conjunto qualquer e E é um conjunto não-vazio com $A \cap E = \varnothing$ e $\mu^*(E) = 0$, definindo $B = A \cup E$, temos $S(A,B) = (A - B) \cup (B - A) = E$, e assim $d(A,B) = \mu^*(E) = 0$, mas A não é igual e B.

Podemos corrigir este problema fazendo a seguinte identificação: dizemos que $A \sim B$ se $\mu^*(S(A,B)) = 0$, e definindo d sobre o conjunto das classes de equivalência da relação $\sim$. Desta maneira temos realmente uma função distância. Mas, neste trabalho, não utilizaremos esta identificação.

Notemos que m estava definida e era aditiva em $\mathcal{E}$, que é um anel. Usando m^* podemos medir todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^p$, que formam um σ-anel, mas μ^* não é σ-aditiva em $\mathbb{R}^p$, veja Exemplo 2.33.

Vamos então tentar encontrar um σ-anel de subconjuntos de $\mathbb{R}^p$, onde μ^* seja σ-aditiva.

Definição 2.25. *Quando existe uma sucessão $\{A_n\}$ de conjuntos elementares tais que $A_n \to A$, dizemos que A é **finitamente μ-mensurável** e escrevemos $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$.*

*Se A é a reunião de uma coleção enumerável de conjuntos finitamente μ-mensuráveis, dizemos que A é **μ-mensurável** e escrevemos $A \in \mathcal{M}(\mu)$.*

Com isto temos o seguinte importante resultado:

Teorema 2.26. $\mathcal{M}(\mu)$ é um σ-anel e μ^* é σ-aditiva em $\mathcal{M}(\mu)$.

Demonstração: Começaremos a demonstração mostrando que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ é um anel, e que μ^* é aditiva em $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$.

Para isto, sejam $A, B \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, e consideremos sucessões $\{A_n\}$, $\{B_n\} \subset \mathcal{E}$ tais que $A_n \to A$ e $B_n \to B$. Note que:

(i) $A_n \cup B_n \to A \cup B$, pelo item (6) da Proposição 2.23, já que $d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leqslant d(A_n, A) + d(B_n, B)$. Desta maneira $A \cup B \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$.

(ii) $A_n \cap B_n \to A \cap B$, pelo item (6) da Proposição 2.23, com demonstração análoga ao caso (i). Assim $A \cap B \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$.

(iii) $A_n - B_n \to A - B$, também pelo item (6) da Proposição 2.23, e assim $A - B \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$.

(iv) $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$, pois $|\mu^*(A_n) - \mu^*(A)| \leqslant d(A_n, A)$, pelo item (7) da Proposição 2.23.

De (i) e (iii) segue que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ é um anel. Agora, da Proposição 2.9, como μ é aditiva em $\mathcal{E}$ temos

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n) \text{ para cada } n,$$

e fazendo $n \to \infty$, usando o item (iv) para $A_n, B_n, A_n \cup B_n$ e $A_n \cap B_n$, obtemos

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

Então, se $A \cap B = \varnothing$ temos $\mu^*(A \cap B) = 0$, o que implica que μ^* é aditiva em $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$.

Agora provaremos o teorema. Para tal, tomemos $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Por definição $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ com $A'_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ para cada n. Perceba que A pode ser escrito como a união de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ da seguinte maneira: defina $A_1 = A'_1$ e $A_n = (A'_1 \cup A'_2 \cup$

$\ldots \cup A'_n) - (A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_{n-1})$, para $n = 2, 3, \ldots$ Assim $A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, pois $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ é anel, e também $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)$ onde $A_j \cap A_i = \varnothing$ para $i \neq j$. Segue então pelo Teorema 2.20 que

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Notemos que como $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \subset A$ para cada n e μ^* é aditiva em $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, segue que $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$ para cada n, o que implica que

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{2.3}$$

Suponhamos $\mu^*(A) < +\infty$ e seja $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Então de (2.1) temos

$$d(A, B_n) = \mu^*(S(A, B_n)) = \mu^* \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

e fazendo $n \to \infty$ temos $d(A, B_n) = 0$, já que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ é convergente, o que implica que $B_n \to A$, e como $B_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ e com isso $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$. Com isso mostramos que:

$$\text{se } A \in \mathcal{M}(\mu) \text{ e } \mu^*(A) < +\infty \text{ então } A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu). \tag{2.4}$$

Fica claro observar agora que μ^* é σ-aditiva em $\mathcal{M}(\mu)$, pois se $A = \cup A_n$, em que $\{A_n\}$ é uma sucessão de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}(\mu)$ temos as seguintes possibilidades:

(a) se $\mu^*(A_n) < +\infty$ para todo n, segue de (2.4) que $A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, e assim $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ por (2.3).

(b) se $\mu^*(A_n) = +\infty$, então claramente $\mu^*(A) = \infty$ e (2.3) é válida trivialmente.

Agora finalmente vamos provar que $\mathcal{M}(\mu)$ é um σ-anel. Primeiramente, mostremos que $\mathcal{M}(\mu)$ é um anel. Se $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$, então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, onde $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$. Assim, claramente

$$A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) \in \mathcal{M}(\mu),$$

já que $A_n \cup B_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ para cada n, pois $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ é um anel.

Agora, note que para cada n, temos $A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i) \in \mathcal{M}(\mu)$, pois $A_n \cap B_i \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ para todo n e todo i. Como $\mu^*(A_n \cap B) \leqslant \mu^*(A_n) < \infty$, pois $A_n \cap B \subset A_n$ e

$A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, segue de (2.4) que $A_n \cap B \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$. Então $A_n - B = A_n - (A_n \cap B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$, pois $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ é um anel. Assim $A - B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n - B) \in \mathcal{M}(\mu)$, o que conclui a prova de que $\mathcal{M}(\mu)$ é um anel.

Note ainde que se $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ para $n = 1, 2...$ temos $\bigcup A_n \in \mathcal{M}(\mu)$, pois união enumerável de uniões enumeráveis é por si uma união enumerável. Portanto $\mathcal{M}(\mu)$ é um σ-anel. ∎

A partir de agora substituiremos a notação $\mu^*(A)$ por $\mu(A)$ se $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Assim conseguimos a extensão de μ que inicialmente era definida em $\mathcal{E}$, para uma função de conjunto σ-aditiva no σ-anel $\mathcal{M}(\mu)$, esta função de conjunto é chamada **medida**. E em um caso especial quando $\mu = m$, temos a **medida de Lebesgue** em $\mathbb{R}^p$.

Note que se A é aberto então $A \in \mathcal{M}(\mu)$, pois todo conjunto aberto de $\mathbb{R}^p$ pode ser obtido da união enumerável de intervalos abertos. Com isso concluímos que todo conjunto fechado também está em $\mathcal{M}(\mu)$, pois $\mathbb{R}^p$ está em $\mathcal{M}(\mu)$ e todo fechado é o complementar de um aberto.

Proposição 2.27. *Dados $A \in \mathcal{M}(\mu)$ e $\epsilon > 0$, existem conjuntos F fechado e G aberto tais que $F \subset A \subset G$, $\mu(G - A) < \epsilon$ e $\mu(A - F) < \epsilon$*

Demonstração: Primeiro, assuma que $\mu(A) < +\infty$ (e consequentemente, $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$). Da definição da medida exterior, sabemos que existe uma cobertura de A por conjuntos abertos elementares $\{G_n\}$ tais que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) < \mu(A) + \epsilon,$$

e definindo $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, como $\mu(A) < +\infty$, temos

$$\mu(G - A) = \mu(G) - \mu(A) < \epsilon,$$

e claramente G é aberto e $A \subset G$.

Se $\mu(A) = +\infty$, então podemos escrever $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ onde $A_n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mu)$ para cada n. Assim, para cada n, existe um aberto G_n tal que $\mu(G_n - A_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$. Então se $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ temos

$$G - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A_n),$$

e portanto

$$\mu(G - A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n - A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon,$$

onde G é aberto e $A \subset G$.

Para o restante, aplicando o que acabamos de demonstrar para $B = \mathbb{R}^p - A \in \mathcal{M}(\mu)$, segue que existe um aberto G_1 com $B \subset G_1$ tal que $\mu(G_1 - B) < \epsilon$. Definindo $F = \mathbb{R}^p - G_1$, temos F fechado e $F \subset A$. Além disso $G_1 - B = G_1 \cap A = A - F$ e portanto $\mu(A - F) = \mu(G_1 - B) < \epsilon$. ■

Definição 2.28. *Dizemos que E é um **conjunto de Borel** se E pode ser obtido à partir de conjuntos abertos, por uma quantidade enumerável de operações, constituindo cada uma delas em união, interseção ou passagem a complemento.*

A coleção $\mathcal{B}$ de todos os conjuntos de Borel em $\mathbb{R}^p$ é σ-anel, que contém todos os conjuntos abertos. Como todos os abertos estão em $\mathcal{M}(\mu)$, segue que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(\mu)$.

Proposição 2.29. *Se $A \in \mathcal{M}(\mu)$, existem conjuntos de Borel F e G tais que $F \subset A \subset G$ e $\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0$.*

Demonstração: Para cada n, existem F_n fechado e G_n aberto, com $F_n \subset A \subset G_n$ tais que

$$\mu(G_n - A) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \mu(A - F_n) < \frac{1}{n}.$$

Defina $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ e $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Temos $F, G \in \mathcal{B}$ com $F \subset A \subset G$ e ainda, como $G - A \subset G_n - A$ e $A - F \subset A - F_n$ para cada n, temos

$$\mu(G - A) < \frac{1}{n} \quad \text{e } \mu(A - F) < \frac{1}{n} \text{ para todo } n,$$

e fazendo $n \to \infty$ obtemos o resultado. ■

Como $A = F \cup (A - F)$, vemos que todo $A \in \mathcal{M}(\mu)$ é a união de um conjunto de Borel e de um conjunto de medida nula. Ainda os conjuntos de Borel são μ-mesuráveis para toda μ, no entanto os conjuntos de medida nula (isto é, os conjuntos B para os quais $\mu(B) = 0$) podem ser diferentes para diferentes μ. Mas, independentemente da medida μ, os conjuntos de medida nula constituem um σ-anel.

No caso da medida de Lebesgue, todo conjunto enumerável tem medida nula, pois cada elemento desse conjunto enumerável pode ser escrito como um intervalo do tipo $[x, x]$ que possui medida nula para cada x.

2.3 Espaços de Medida

Com as construções feitas anteriormente, podemos definir o conceito abstrato de *espaço de medida* com o qual trabalharemos, a fim de definir a integral de Lebesgue.

Definição 2.30. *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que X é um* ***espaço de medida*** *se existe um σ-anel $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X e uma função de conjunto μ, não negativa e σ-aditiva definida em $\mathcal{M}$.*

Ainda se $X \in \mathcal{M}$ dizemos que X é um ***espaço mensurável****.*

É sobre os subconjuntos dos espaços de medida que se definirá a integral de Lebesgue, veremos mais detalhes em breve. Os elementos do σ-anel $\mathcal{M}$ são chamados de **conjuntos mensuráveis** e μ é chamada de **medida**.

Exemplo 2.31. *Sejam X um conjunto não vazio, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X e μ a medida da contagem em $\mathcal{M}$. Então X é um espaço mensurável.*

Existem espaços que possuem muitos conjuntos não-mensuráveis. O espaço $\mathcal{M}(m)$, onde m é a medida de Lebesgue, é um exemplo deste, como veremos a seguir.

2.3.1 Construção de um conjunto não-mensurável

Um *conjunto de Vitali* é um subconjunto V do intervalo $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, que satisfaz a seguinte condição: dado $x \in \mathbb{R}$ existe um único $v \in V$ tal que $v - x$ é racional.

A demonstração da existência de tal conjunto é feita da seguinte maneira: considere a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{R}$ dada por $a \sim b$ se e só se $a - b$ é racional. Assim $\mathbb{R}$ pode ser decomposto em classes de equivalência da forma $x + \mathbb{Q}$ para $x \in \mathbb{R}$. Assim, temos uma quantidade não enumerável de classes de equivalência que particionam $\mathbb{R}$. Como cada classe é densa em $\mathbb{R}$, cada uma delas intercepta $[0,1]$, e pelo Axioma da Escolha, podemos escolher exatamente um elemento de cada classe, que esteja em $[0,1]$. Note então que um conjunto formado desta forma é um conjunto de Vitali.

Mostraremos que um conjunto de Vitali V é não-mensurável. De fato, assuma que V é um conjunto de Vitali não-mensurável. Seja $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais em $[-1,1]$. Da construção de V, definindo $V_n = V + q_n$, sabemos que $V_n \cap V_m = \varnothing$ se $n \neq m$. Note ainda que

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq [-1,2].$$

Para a primeira inclusão, note que se $r \in [0,1]$, seja v o representante da classe de r em V, assim $r - v$ é um racional em $[-1,1]$, e portanto $r - v = q_n$ para algum n. A segunda inclusão é direta.

Aplicando então a medida de Lebesgue e usando a σ-aditividade de m sobre os mensuráveis, temos

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) \leqslant 3.$$

Aqui lembramos que a medida de Lebesgue é invariante por translações (veja a Observação 2.18), e portanto $m(V_n) = m(V)$ para todo n e assim obtemos

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(V) \leqslant 3,$$

o que nos dá uma contradição, pois se $m(V) = 0$ então a primeira desigualdade está incorreta. Já se $m(V) > 0$ então a série é divergente, e a segunda desigualdade está incorreta. Portanto V não pode ser mensurável.

O exemplo acima pode ser estendido, por meio do seguinte teorema:

Teorema 2.32. Seja $\mathcal{M}(m)$ o conjunto dado no Teorema 2.26, onde m é a medida de Lebesgue. Então cada $E \in \mathcal{M}(m)$ com $m(E) > 0$ possui um subconjunto que não está em $\mathcal{M}(m)$.

Para a demonstração deste resultado, convidamos o leitor a olhar [2, Teorema 17].

Com esta connstrução, podemos exibir um exemplo que mostra que a medida exterior m^* não é aditiva no conjunto das partes de $\mathbb{R}$ (e analogamente se mostra o mesmo em $\mathbb{R}^p$).

Exemplo 2.33. *Sejam V um conjunto de Vitali e $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais em $[0,1]$. Como antes, defina $V_n = V + q_n$.Sabemos que os conjuntos V_n para $n \geqslant 1$ são dois a dois disjuntos e também $[0,1] = \cup_{n\geqslant 1} V_n$.*

Assim, usando a σ-subaditividade de m^* (item (b) do Teorema 2.20), temos

$$1 = m^*([0,1]) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(V),$$

usando a invariância por translação da medida de Lebesgue. Assim, concluímos que $m^*(V) > 0$. Escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 m^*(V) > 1$ e defina $E = \cup_{n=1}^{n_0} V_n$. Assim $E \subseteq [0,1]$, logo $m^*(E) \leqslant 1$. Mas

$$\sum_{n=1}^{n_0} m^*(V_n) = \sum_{n=1}^{n_0} m^*(V) = n_0 m^*(V) > 1,$$

o que mostra que

$$m^*(E) \leqslant 1 < \sum_{n=1}^{n_0} m^*(V_n),$$

e portanto m^* não é aditiva (e portanto não é σ-aditiva) no conjunto das partes de $\mathbb{R}$.

2.4 Funções Mensuráveis

No que segue, sempre consideraremos X um espaço mensurável, isto é, X possui um σ-anel $\mathcal{M}$ de subconjuntos com $X \in \mathcal{M}$, e μ uma medida em $\mathcal{M}$.

Definição 2.34. *Seja $f\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ uma função. Dizemos que f é uma **função mensurável** se o conjunto $\{x\colon f(x) > a\}$ é mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Da definição acima, vemos claramente que se $X = \mathbb{R}^p$ e m é a medida de Lebesgue então toda função contínua é mensurável. Mas existem funções que não são mensuráveis, como por exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in V \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde V é o conjunto não-mensurável construído na seção anterior. Assim $\{x\colon f(x) > 0\} = V$ que não é mensurável, logo f não é mensurável.

Temos a seguinte equivalência na definição de funções mensuráveis.

Teorema 2.35. Dada $f\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ uma função, são equivalentes:

(i) $\{x\colon f(x) > a\}$ é mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\{x\colon f(x) \geqslant a\}$ é mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{x\colon f(x) < a\}$ é mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iv) $\{x\colon f(x) \leqslant a\}$ é mensurável para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

(**i**) $\Longrightarrow$ (**ii**) Primeiramente, notemos que

$$\{x\colon f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x\colon f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

De fato, defina $A = \{x\colon f(x) \geqslant a\}$, $A_n = \left\{x\colon f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}$ para cada n e $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Se $x \in A$ então $f(x) \geqslant a$ e portanto, para cada n inteiro positivo, temos $f(x) > a - \frac{1}{n}$, isto é, $x \in A_n$ para cada n e portanto $x \in B$. Com isto mostramos que $A \subset B$. Reciprocamente, se $x \in B$ então $f(x) > a - \frac{1}{n}$ para todo n inteiro positivo, e fazendo $n \to \infty$, obtemos $f(x) \geqslant a$, e portanto $x \in A$. Desta forma $B \subset A$ e a igualdade está demonstrada.

Temos de (i) que A_n é mensurável para cada n, e como $\mathcal{M}$ é um σ-anel, segue que B é também mensurável, o que implica que A é mensurável.

(**ii**) $\Longrightarrow$ (**iii**) Note que

$$\{x\colon f(x) < a\} = X - \{x\colon f(x) \geqslant a\},$$

e como X é mensurável e $\{x\colon f(x) \geqslant a\}$ também é mensurável, temos $\{x\colon f(x) < a\}$ mensurável, pois $\mathcal{M}$ é um σ-anel.

(iii) $\Longrightarrow$ **(iv)** Para este caso note que

$$\{x\colon f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\colon f(x) < a - \frac{1}{n}\}.$$

A igualdade desses dois conjuntos é facilmente obtida de modo análogo ao da primeira implicação desta demonstração. Como $\{x\colon f(x) < a - \frac{1}{n}\}$ é mensurável para cada n e como $\mathcal{M}$ é σ-anel, então $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f(x) < a - \frac{1}{n}\}$ também é mensurável.

(iv) $\Longrightarrow$ **(i)** Note finalmente que

$$\{x\colon f(x) > a\} = X - \{x\colon f(x) \leqslant a\},$$

e a demonstração para este caso é análoga à da segunda implicação. ∎

Vimos então neste último teorema que o conjunto mensurável da Definição 2.34 pode ser substituído sem nenhum problema por algum dos quatro conjuntos mensuráveis do Teorema 2.35. Agora, dando continuidade à construção da teoria, os seguintes resultados se farão necessários mais a frente.

Teorema 2.36. Se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável.

Demonstração: Note que

$$\{x\colon |f(x)| < a\} = \{x\colon -a < f(x) < a\} = \{x\colon f(x) < a\} \cap \{x\colon f(x) > -a\},$$

e como $\{x\colon f(x) < a\}$ e $\{x\colon f(x) > -a\}$ são mensuráveis, pelo Teorema 2.35, temos $\{x\colon f(x) < a\} \cap \{x\colon f(x) > a\} \in \mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}$ é σ-anel, e concluímos que $\{x\colon |f(x)| < a\}$ é mensurável, para todo $a \in \mathbb{R}$. ∎

O seguinte teorema é de fundamental importância para os resultados de convergência da integral de Lebesgue.

Teorema 2.37. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis e $f_n\colon X \to \mathbb{R}_\infty$. Para $x \in X$, defina

(a) $g(x) = \sup\limits_{n\geqslant 1}(f_n(x))$;

(b) $r(x) = \inf\limits_{n\geqslant 1}(f_n(x))$;

(c) $h(x) = \limsup\limits_{n\to\infty}(f_n(x))$ e

(d) $s(x) = \liminf\limits_{n\to\infty}(f_n(x))$.

Então g, h, r e s são funções mensuráveis.

Demonstração:

De (a): Vejamos que

$$\{x\colon g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) > a\}.$$

De fato, se $g(x) > a$, temos $\sup\limits_{n\geqslant 1}(f_n(x)) > a$, e assim $f_n(x) > a$ para algum n, pois caso contrário $f_n(x) \leqslant a$ para todo n e teríamos $\sup\limits_{n\geqslant 1}(f_n(x)) \leqslant a$ o que é uma contradição. Assim $\{x\colon g(x) > a\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) > a\}$.

Reciprocamente, tome $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) > a\}$. Assim $x \in \{x\colon f_N(x) > a\}$ para algum N, temos então $f_N(x) > a$ e portanto $\sup\limits_{n\geqslant 1}(f_n(x)) \geqslant f_N(x) > a$, o que mostra que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) > a\} \subset \{x\colon g(x) > a\}$.

Agora, para cada n o conjunto $\{x\colon f_n(x) > a\}$ é mensurável por hipótese, ou seja $\{x\colon f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}$ que é um σ-anel, e pelo fato de ser σ-anel temos $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}$ e portanto mensurável, o que implica que g é uma função mensurável.

De (b): Para r, notemos que

$$\{x\colon r(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\colon f_n(x) < a\},$$

e a demonstração segue análoga à do item (a).

De (c): Para cada $m \geqslant 1$, defina $g_m(x) = \sup_{n\geqslant m}(f_n(x))$, que é uma função mensurável, para cada m, pelo item (a). Mostremos agora que $h(x) = \inf\limits_{m\geqslant 1}(g_m(x))$.

De fato, fixemos $x \in X$ e tomemos $\alpha = h(x)$ e $\beta = \inf\limits_{m\geqslant 1}(g_m(x))$. Da definição de ínfimo, aplicada à β, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $m_0 \geqslant 1$ tal que $\beta \leqslant g_{m_0}(x) < \beta + \epsilon$. Assim, da definição de g_{m_0} segue que $f_n(x) < \beta + \epsilon$ para todo $n \geqslant m_0$. Tomando o $\limsup$ quando $n \to \infty$, obtemos

$$\alpha = \limsup_{n\longrightarrow\infty}(f_n(x)) \leqslant \beta + \epsilon,$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\alpha \leqslant \beta$.

Reciprocamente, usando a definição de limite superior, aplicada à α, segue que dado $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que $f_n(x) \leqslant \alpha + \epsilon$ para todo $n \geqslant m_0$. Segue então que $g_{m_0}(x) = \sup\limits_{n\geqslant m_0}(f_n(x)) \leqslant \alpha + \epsilon$. Portanto $\beta = \inf\limits_{m\geqslant 1}(g_m(x)) \leqslant \alpha + \epsilon$ e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\beta \leqslant \alpha$, e concluímos então que $h(x) = \limsup\limits_{n\to\infty}(f_n(x)) = \inf\limits_{m\geqslant 1}(g_m(x))$ e segue do item (b) que h é mensurável.

De (d): Análoga à de (c), notando que $s(x) = \sup\limits_{m\geqslant 1}(r_m(x))$, onde $r_m(x) = \inf\limits_{n\geqslant m}(f_n(x))$. ■

Temos então o seguinte útil resultado:

Corolário 2.38.

(i) *Se* $f, g\colon X \to \mathbb{R}_\infty$, f *e* g *mensuráveis, então* $\max(f, g)$ *e* $\min(f, g)$ *são mensuráveis. Definindo*

$$f^+ = \max(f, 0) \quad e \quad f^- = -\min(f, 0),$$

segue que, em particular, f^+ e f^- são mensuráveis.

(ii) *O limite de uma sequência convergente(convergência pontual) de funções mensuráveis é mensurável.*

Demonstração:

De (i): Defina $h(x) = \max(f(x), g(x))$, para $x \in X$. Neste caso temos $h(x) = \sup(f(x), g(x))$ e como f e g são mensuráveis, do Teorema 2.37 segue que $h(x)$ é mensurável. Note que se $g(x) = 0$ para todo x, então g é mensurável, pois $\{x : g(x) > a\} = \varnothing$ se $a \geqslant 0$ e $\{x : g(x) > a\} = X$ se $a < 0$, e $\varnothing, X \in \mathcal{M}$. Então $h(x) = \max(f(x), 0)$ é mensurável, pois f e g são mensuráveis. Análogo para $\min(f, g)$ e para f^-.

De (ii): Seja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, onde f_n é mensurável para cada $n = 1, 2, ...$ Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe, então $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, e pelo Teorema 2.37 temos $f(x)$ mensurável. ■

Veremos no próximo teorema que operações como soma e produto de funções mensuráveis geram funções mensuráveis. Note que neste caso, para evitar indeterminações, nos restringimos ao caso de funções a valores reais, e não a valores reais estendidos.

Teorema 2.39. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções reais mensuráveis, e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real e contínua. Defina

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \text{ para todo } x \in X.$$

Então h é mensurável, e em particular, $f + g$ e $f \cdot g$ são mensuráveis.

Demonstração: Para cada $a \in \mathbb{R}$, seja $G_\alpha = \{(u, v) : F(u, v) > a\} = F^{-1}((a, +\infty))$. Como F é contínua, segue que G_α é um aberto de $\mathbb{R}^2$, e pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos $\{I_n\}$ de $\mathbb{R}^2$, isto é, $G_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, onde $I_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : a_n < u < b_n \text{ e } c_n < v < d_n\}$.

Notemos ainda que $\{x : a_n < f(x) < b_n\} = \{x : a_n < f(x)\} \cap \{x : f(x) < b_n\}$, que é mensurável pois f é mensurável por hipótese. O mesmo vale para $\{x : c_n < g(x) < d_n\}$.

Segue disso que $\{x : (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x : a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x : c_n < g(x) < d_n\}$ é mensurável. Sendo assim $\{x : h(x) > a\} = \{x : (f(x), g(x) \in G_\alpha)\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : (f(x), g(x) \in I_n)\}$ é mensurável, pois para cada n $\{x : (f(x), g(x) \in I_n)\}$ é mensurável.

Em particular, se tivermos $F(u, v) = u + v$ ou $F(u, v) = uv$, teremos $f + g$ e $f \cdot g$ mensuráveis. ■

O resultado acima pode ser usado para demonstrar que, em particular, se $f\colon X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ é também mensurável, bastando tomar para isso $F(u, v) = g(u)$, assim $g \circ f = F(f(x), 0)$.

Este não é sempre o caso se f e g são assumidas somente mensuráveis, isto é, a composta de funções mensuráveis nem sempre é mensurável. Os exemplos não são simples de serem construídos, e fogem um pouco do escopo do nosso trabalho. O leitor pode ver [2] para mais detalhes.

Finalmente, perceba que em toda essa parte sobre funções mensuráveis não foi necessário trabalharmos em específico com a função medida μ dada, isto é, o conceito de função mensurável está ligado especificamente ao σ-anel $\mathcal{M}$ de X.

3 Integral de Lebesgue

Neste capítulo trabalharemos com a *integral de Lebesgue*. Veremos sua construção, as propriedades básicas e alguns dos principais teoremas que a envolvem. Começaremos a construção da integral integrando as *funções simples*.

3.1 Funções Simples

Definição 3.1. *Seja s uma função real definida em X. Se o conjunto dos valores(imagem) de s é finito, dizemos que s é uma **função simples**. Em outras palavras, s é uma função simples se o seu conjunto imagem é dado por um número finito de pontos.*

Definição 3.2. *Seja $E \subset X$ e defina*

$$K_E(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in E, \\ 0, & se \quad x \notin E \end{cases}.$$

*Dizemos que K_E é a **função característica** de E.*

Suponhamos que s seja uma função simples e que $s(X) = \{c_i\}_{i=1}^{n}$, em que $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$. Defina $E_i = \{x\colon s(x) = c_i\}$ para cada $i = 1, ..., n$. Então

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \text{ para todo } x \in X,$$

ou seja, toda função simples é uma combinação linear de funções características.

Claramente, escrevendo s desta maneira vemos que é mensurável se, e somente se, os conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ são mensuráveis.

Vamos agora mostrar um resultado que garante que podemos aproximar funções por funções simples, com convergência pontual.

Teorema 3.3. Seja f uma função real em X. Então existe uma sequência de funções simples $\{s_n\}$, tais que $s_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$, para qualquer que seja $x \in X$. Além disso, se f é mensurável, podemos escolher $\{s_n\}$ como uma sequência de funções mensuráveis. Se $f \geqslant 0$ podemos escolher $\{s_n\}$ como uma sequência monótona crescente.

Demonstração: Provaremos primeiramente o caso onde $f \geqslant 0$. Para cada $n \geqslant 1$ e $i = 1, ..., n2^n$, defina

$$E_{n,i} = \left\{x \in X\colon \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n}\right\} \qquad \text{e} \qquad F_n = \{x \in X\colon f(x) \geqslant n\}.$$

Claramente $X = \left(\bigcup_{i=1}^{n2^n} E_{n,i}\right) \cup F_n$ para cada $n \geqslant 1$. Defina

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{n,i}(x) + nK_{F_n}(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Temos s_n uma função simples e perceba que $s_n \leqslant s_{n+1}$ para cada $n \geqslant 1$. Mostremos que $s_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para cada $x \in X$. Para isso fixe $x \in X$ e tome $\epsilon > 0$. Escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$ e $f(x) \leqslant n_0$. Assim, se $n \geqslant n_0$ temos $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ e $f(x) \leqslant n$. Segue disso que existe $i_0 \in \{1, ..., n2^n\}$ tal que

$$\frac{i_0 - 1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i_0}{2^n},$$

o que implica que $x \in E_{n,i_0}$ e $|f(x) - s_n(x)| = |f(x) - \frac{i_0-1}{2^n}| \leqslant \frac{i_0}{2^2} - \frac{i_0-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \epsilon$ e assim concluímos que $s_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$.

No caso geral considere $f = f^+ - f^-$, aplique o método acima para f^+ e f^- e some as sequências obtidas. ∎

3.2 Integração

Enfim chegamos à seção principal deste trabalho, onde definiremos a *integral de Lebesgue*, e demonstraremos algumas de suas propriedades. Fixemos um espaço mensurável X, onde $\mathcal{M}$ é o σ-anel dos conjuntos mensuráveis e μ é a medida.

Definição 3.4. *Seja s uma função simples não-negativa e mensurável, escrita na forma $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x)$, isto é, cada E_i é mensurável, $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$ e $c_i \geqslant 0$. Se E é mensurável, definimos*

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Se f é mensurável e não-negativa, definimos

$$\int_E f d\mu = \sup I_E(s),$$

*onde o supremo nesta igualdade é tomado com relação a todas as funções simples mensuráveis s tais que $0 \leqslant s \leqslant f$. O número $\int_E f d\mu$ é chamado de **integral de Lebesgue** de f, relativamente à medida μ, sobre o conjunto E.*

Note que esta integral pode ter o valor $+\infty$. Para que a definição esteja bem colocada, vejamos que no caso de funções simples, a integral e a soma($I_E(s)$) têm o mesmo valor.

Lema 3.5. *Temos* $s\colon E \to \mathbb{R}$ $\int_E s d\mu = I_E(s)$, *para qualquer que seja a função* s *simples, não negativa e mensurável.*

Demonstração: Por definição temos

$$\int_E s d\mu = \sup I_E(r),$$

com $0 \leqslant r \leqslant s$, r simples e mensurável. Claramente, pela definição, temos $I_E(s) \leqslant \int_E s d\mu$.

Seja agora r nas hipóteses acima, e escrevamos

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i} \quad \text{e} \quad r = \sum_{j=1}^{m} d_j K_{F_j},$$

onde E_i e F_j são mensuráveis para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., n$, $E_i \cap E_k = \varnothing$ para $i \neq k$, $F_j \cap F_l = \varnothing$ para $j \neq k$, e também $X = \cup_{i=1}^{n} E_i = \cup_{j=1}^{m} F_j$.

Para cada $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$, defina $G_{i,j} = E_i \cap F_j$ (que pode ser eventualmente $\varnothing$). Assim $G_{i,j} \cap G_{k,l} = \varnothing$ se $i \neq k$ ou se $j \neq l$, e ainda $E_i = \cup_{j=1}^{m} G_{i,j}$ e $F_j = \cup_{i=1}^{n} G_{i,j}$. Podemos então escrever

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i K_{G_{i,j}} \quad \text{e} \quad r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_j K_{G_{i,j}}.$$

Se $x \in G_{ij}$ então $r(x) = d_j$ e $s(x) = c_i$ o que implica em $d_j \leqslant c_i$, pois $r \leqslant s$, então

$$\begin{aligned} I_E(r) &= \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(E \cap F_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(E \cap G_{ij}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \mu(E \cap G_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i) = I_E(s), \end{aligned}$$

o que nos dá $I_E(r) \leqslant I_E(s)$ e assim $\sup I_E(r) \leqslant I_E(s)$, e portanto $\int_E s d\mu = I_E(s)$. ■

Nossa próxima definição traz o caso mais geral da integral de Lebesgue, onde não necessitamos que nossa função seja não-negativa.

Definição 3.6. *Seja* f *mensurável e consideremos as duas integrais*

$$\int_E f^+ d\mu \quad e \quad \int_E f^- d\mu.$$

Se <u>*ao menos uma*</u> *das integrais é finita, definimos*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Se <u>*ambas*</u> *as integrais* $\int_E f^+ d\mu$ *e* $\int_E f^- d\mu$ *são finitas, então* $\int_E f d\mu$ *é finita e dizemos que* f *é* ***integrável em*** E ***no sentido de Lebesgue*** *relativamente a* μ, *e escrevemos* $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Observação 3.7. *Dizemos que f é integrável em E se, e somente se, sua integral sobre E for finita. Quando a integral de f é $+\infty$ ou $-\infty$ dizemos que f NÃO é integrável em E no sentido de Lebesgue.*

O seguinte teorema nos permite construir novas medidas, usando a medida μ e funções mensuráveis f.

Teorema 3.8.

(i) Suponhamos f não-negativa e mensurável em X. Para $A \in \mathcal{M}$ definimos

$$\phi(A) = \int_A f d\mu,$$

então ϕ é σ-aditiva em $\mathcal{M}$.

(ii) A mesma conclusão é válida para $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em X.

Demonstração:

De (i): Seja $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n$, onde $A_n \in \mathcal{M}$ para $n \geqslant 1$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Devemos mostrar que $\phi(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$. Vamos quebrar a demonstração em alguns casos:

<u>Caso 1:</u> f é uma função característica de um conjunto mensurável E.

Neste caso, a σ-aditividade de ϕ segue da σ-aditividade de μ, visto que

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \int_A K_E d\mu = I_A(K_E)) = \mu(A \cap E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap E\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(K_E) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).\end{aligned}$$

<u>Caso 2:</u> f é simples, isto é, $f = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i K_{E_i}$.

Neste caso $\int_A f d\mu = I_A(f)$, onde

$$\begin{aligned}I_A(f) &= \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E_i)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A_n \cap E_i)) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).\end{aligned}$$

<u>Caso geral:</u> seja s simples e mensurável tal que $0 \leqslant s \leqslant f$. Então

$$I_A(s) = \int_A s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Segue do fato de $\int_A f d\mu = \sup I_A(s)$ que $\phi(A) = \displaystyle\int_A f d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$, ou seja, $\phi(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$.

Para a outra desigualdade, se $\phi(A_n) = +\infty$ para algum n é evidente que $\phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$, pois teríamos $\phi(A) \geqslant \phi(A_n)$ (já que $A_n \subset A$).

Agora, se $\phi(A_n) < +\infty$ para todo n, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher s simples e mensurável com $0 \leqslant s \leqslant f$ tal que

$$\int_{A_1} s d\mu \geqslant \int_{A_1} f d\mu - \epsilon \quad \text{e} \quad \int_{A_2} s d\mu \geqslant \int_{A_2} f d\mu - \epsilon,$$

e somando estas expressões temos

$$\int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geqslant \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d - 2\epsilon = \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\epsilon.$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\phi(A_1 \cup A_2) &= \int_{A_1 \cup A_2} f d\mu \geqslant \int_{A_1 \cup A_2} s d\mu = I_{A_1 \cup A_2}(s) = I_{A_1}(s) + I_{A_2}(s) \\
&= \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geqslant \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu - 2\epsilon \\
&= \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\epsilon,
\end{aligned}$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $\phi(A_1 \cup A_2) \geqslant \phi(A_1) + \phi(A_2)$.

Suponhamos agora por indução que

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \phi(A_i).$$

Definindo $B_1 = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ e $B_2 = A_{k+1}$ e aplicando os cálculos acima para B_1 e B_2, obtemos $\phi(B_1 \cup B_2) \geqslant \phi(B_1) + \phi(B_2)$, ou seja

$$\begin{aligned}
\phi\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \phi(B_1 \cup B_2) \geqslant \phi(B_1) + \phi(B_2) = \phi\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + \phi(A_{k+1}) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{k} \phi(A_i) + \phi(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \phi(A_i).
\end{aligned}$$

Assim por indução

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \phi(A_i),$$

para todo $n \geqslant 1$ e fazendo $n \to \infty$, usando o Teorema 2.10 temos $\phi(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ e portanto $\phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$, ou seja, a função de conjuntos ϕ é σ-aditiva.

De (ii): A demonstração deste item decorre do anterior aplicado à f^+ e f^-. ■

O seguinte corolário mostra que se dois conjuntos diferem apenas por um conjunto de medida nula, a integral não se altera, ou seja, a integral de Lebesgue desconsidera conjuntos de medida nula na hora da integração.

Corolário 3.9. *Se $A, B \in \mathcal{M}$, $B \subset A$ e $\mu(A - B) = 0$, então $\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$*

Demonstração: Sabe-se que $A = B \cup (A - B)$, então temos

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu = \int_{B\cup(A-B)} f d\mu &= \phi(B \cup (A - B)) = \phi(B) + \phi(A) \\ = \int_B f d\mu + \int_{A-B} f d\mu &= \int_B f d\mu \end{aligned},$$

pois $\int_{A-B} f d\mu = 0$.

■

Com este último corolário mostramos que conjuntos de medida nula são desprezíveis na integração.

Segue uma proposição que resume outras importantes propriedades da integral de Lebesgue.

Proposição 3.10. *Seja $f \colon X \to \mathbb{R}_\infty$ temos então as seguintes propriedades:*

(a) *Se f é mensurável e limitada em E e $\mu(E) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E.*

(b) *Se $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para $x \in E$ e $\mu(E) < +\infty$, então*

$$a\mu(E) \leqslant \int_E f d\mu \leqslant b\mu(E).$$

(c) *Se $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ em E e $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \in E$, então*

$$\int_E f d\mu \leqslant \int_E g d\mu.$$

(d) *Se $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E, então $cf \in \mathcal{L}(\mu)$ em E, qualquer que seja a constante c. E*

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(e) *Se $\mu(E) = 0$ e f é mensurável, então*

$$\int_E f d\mu = 0.$$

(f) *Se $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E, $A \in \mathcal{M}$ e $A \subset E$, então $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em A.*

Demonstração: Provaremos primeiramente o item (c), e os itens (a) e (b) serão consequências diretas deste. Considere os seguintes conjuntos

$$A = \{x \in E\colon f(x) \geqslant 0\}, B = \{x \in E\colon f(x) < 0 \leqslant g(x)\} \text{ e } C = \{x \in E\colon g(x) < 0\},$$

e claramente temos $E = A \cup B \cup C$ e $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$.

Em A temos $0 \leqslant f \leqslant g$ e assim se $0 \leqslant s \leqslant f$ é uma função simples e mensurável em A, seque que $0 \leqslant s \leqslant g$ e assim $I_A(s) \leqslant \int_A g d\mu$. Portanto $\int_A f d\mu \leqslant \int_A g d\mu$. Para B, temos $f = -f^- < 0$ e $g = g^+ \geqslant 0$ e assim $\int_B f d\mu \leqslant \int_B g d\mu$. Já em C, temos $f(x) \leqslant g(x) < 0$, assim $f = -f^-$ e $g = -g^-$, e $g^- = -g \leqslant -f = f^-$, assim temos $\int_C g^- d\mu \leqslant \int_C f^- d\mu$, o que nos dá $\int_C f d\mu \leqslant \int_C g d\mu$. Assim, do Teorema 3.8, segue que

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu = \int_{A \cup B \cup C} f d\mu &= \int_A f d\mu + \int_B f d\mu + \int_C f d\mu \\ &\leqslant \int_A g d\mu + \int_B g d\mu + \int_C g d\mu = \int_{A \cup B \cup C} g d\mu = \int_E g d\mu.\end{aligned}$$

Provemos agora o item (d). Separemos alguns casos.

<u>Caso 1:</u> $f \geqslant 0$ e $c > 0$.

Neste caso temos

$$\int_E (cf) d\mu = \sup I_E(cs) = c \sup I_E(s) = c \int_E f d\mu,$$

onde $0 \leqslant s \leqslant f$ com s simples e mensurável.

<u>Caso 2:</u> $f \geqslant 0$ e $c = -1$.

Neste caso temos $-f \leqslant 0$, $(-f)^+ = 0$ e $(-f)^- = f$. Então

$$\int_E (cf) d\mu = \int_E (-f) d\mu = \int_E (-f)^+ d\mu - \int_E (-f)^- d\mu = -\int_E f d\mu.$$

<u>Caso 3:</u> $f \geqslant 0$ e $c < 0$.

Escreva $c = -k$ com $k > 0$. Pelos casos anteriores temos

$$\int_E c f d\mu = \int_E (-kf) d\mu = -\int_E k f d\mu = -k \int_E f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

Para o caso geral basta aplicar os casos acima para f^+ e f^-.

Para o item (e), note que por definição $\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$, e $f^+ = \max(f, 0) \leqslant |f|$, seja s simples e mensurável tal que $0 \leqslant s \leqslant f$, em que $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x)$ e $I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$. Perceba que $E \cap E_i = E_i$ pois $E_i \subset E$ para todo i. Segue então que $\mu(E_i) \leqslant \mu(E)$ e como $\mu(E) = 0$ por hipótese temos $\mu(E_i) = 0$. Com isso concluímos que $I_E(s) = 0$ para toda s simples, mensurável e com $0 \leqslant s \leqslant f$, portanto $\int_E f d\mu = \sup I_E(s) = 0$.

Finalmente note que (f) segue da σ-aditividade de ϕ dada no Teorema 3.8, pois

$$\int_E f d\mu = \phi(E) = \phi(A \cup (E - A)) = \phi(A) + \phi(E - A),$$

logo $\phi(A) < +\infty$ e portanto $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em A. ∎

Motivados pelo Corolário 3.9, faremos a seguinte definição.

Definição 3.11. *Definimos $f \sim g$ em E se, e somente se,*

$$\mu(\{x \colon f(x) \neq g(x)\} \cap E) = 0.$$

Notemos que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato:

<u>Reflexiva:</u> Note que $\{x \colon f(x) \neq f(x)\} \cap E = \varnothing$ e $\mu(\varnothing) = 0$, ou seja, $f \sim f$.

<u>Simétrica</u> Se $f \sim g$ temos $\mu(\{x \colon f(x) \neq g(x)\} \cap E) = 0$ e segue que $\{x \colon f(x) \neq g(x)\} \cap E = \{x \colon g(x) \neq f(x)\} \cap E$, ou seja $\mu(\{x \colon g(x) \neq f(x)\} \cap E) = 0$ e assim $g \sim f$.

<u>Transitiva</u> Se $f(x) \neq h(x)$ então temos duas possibilidades: ou $f(x) \neq g(x)$ ou $f(x) = g(x)$ e neste último caso $g(x) \neq h(x)$. Portanto

$$\{x \colon f(x) \neq h(x)\} \cap E \subset (\{x \colon f(x) \neq g(x)\} \cap E) \bigcup (\{x \colon g(x) \neq h(x)\} \cap E)\,,$$

e portanto, se $f \sim g$ e $g \sim h$, temos $\mu(\{x \colon f(x) \neq h(x)\} \cap E) = 0$, e portanto $f \sim h$.

Teorema 3.12. Se $f \sim g$ em E, então dado $A \subset E$ temos $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, desde que as integrais existam.

Demonstração: Note que como $A \subset E$, como $f \sim g$ em E, temos $f \sim g$ em A. Então o conjunto $B = \{x \in A \colon f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula e

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_{B \cup (A-B)} f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A-B} f d\mu = \int_{A-B} f d\mu \\ &= \int_{A-B} g d\mu = \int_B g d\mu + \int_{A-B} g d\mu = \int_{B \cup (A-B)} g d\mu = \int_A g d\mu, \end{aligned}$$

onde usamos que $\mu(B) = 0$ e $f = g$ em $A - B$. ∎

Se uma propriedade P é válida para todo x em $E - A$ onde A é um conjunto de medida nula, dizemos que P é válida **para quase todo** $x \in E$, ou ainda que P **é válida em quase todo** E.

Percebemos ainda que se f é uma função a valores reais estendidos e $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E, então $f(x)$ é finita em quase todo E, ou seja, $\{x \colon f(x) = +\infty\}$ é um conjunto de medida nula. Isso faz com que nosso estudo não perca nenhuma generalidade ao tratarmos somente de funções a valores reais.

Teorema 3.13. Se $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E, então $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ em E e

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leqslant \int_E |f| d\mu.$$

Demonstração: Defina

$$A = \{x \in E \colon f(x) \geqslant 0\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in E \colon f(x) < 0\}.$$

Então claramente $E = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$, e pelo Teorema 3.8 temos $\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu$, já que $|f|$ é mensurável pelo Teorema 2.36. Mas em A, $|f| = f = f^+$ e assim

$$\int_A |f| d\mu = \int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu < +\infty.$$

Em B, temos $|f| = -f = f^-$ e logo

$$\int_B |f| d\mu = \int_B (-f) d\mu = \int_B f^- d\mu < +\infty,$$

e assim

$$\int_E |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty,$$

e portanto $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$. Ainda, como $f \leqslant |f|$ e $-f \leqslant |f|$ temos $\int_E f d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu$ e $\int_E -f d\mu = -\int_E f d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu$ e isso implica que $|\int_E f d\mu| \leqslant \int_E |f| d\mu$, o que conclui a demonstração. ∎

Devido a este último resultado dizemos que a integral de Lebesgue é uma integral *absolutamente convergente.*

A seguinte proposição nos dá uma propriedade da integral de Lebesgue, que é bastante parecida com a integral de Riemann.

Proposição 3.14. *Se $f \geqslant 0$ é mensurável e $\int\limits_E f d\mu = 0$, então $f(x) = 0$ em quase todo E.*

Demonstração: Seja

$$E_n = \{x \in E \colon f(x) > \tfrac{1}{n}\} \text{ para cada } n \geqslant 1,$$

e considere $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Perceba que $\mu(A) = 0$ se, e somente se, $\mu(E_n) = 0$ para todo n. Note ainda que $E_n \subset E_{n+1}$ para todo n. Defina agora $F_1 = E_1$ e $F_n = E_n - E_{n-1}$ para cada $n \geqslant 2$. Temos $F_n \subset E_n$ para cada n e $F_n \cap F_m = \varnothing$ se $m \neq n$. Note ainda que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = A$. Assim temos que se $\mu(F_n) = 0$ para todo n, então $\mu(E_n) = 0$ para todo n e consequentemente $\mu(A) = 0$.

Mas

$$0 = \int\limits_E f d\mu \geqslant \int\limits_{F_n} f d\mu \geqslant \int_{F_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{\mu(F_n)}{n} \text{ para todo } n.$$

Assim $\mu(F_n) = 0$ para todo n, o que mostra que $\mu(A) = 0$. Portanto $f(x) \neq 0$ somente em $E - A$, e assim $f = 0$ quase sempre em E. ∎

O seguinte lema será importante para a demonstração de dois resultados sobre convergência de integrais.

Lema 3.15. *Suponhamos f mensurável em E, $|f| \leqslant g$ e $g \in \mathcal{L}(\mu)$ em E. Então $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E.*

Demonstração: Como $\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$ e $f^+ \leqslant |f| \leqslant g$, temos $\int_E f^+ d\mu \leqslant \int_E |f| d\mu \leqslant \int_E g d\mu < +\infty$ pois $g \in \mathcal{L}(\mu)$ em E. Analogamente, $\int_E f^- d\mu < +\infty$, e portanto $f \in \mathcal{L}(\mu)$ em E. ∎

Logo abaixo temos o primeiro de dois teoremas fundamentais para a teoria de integração de Lebesgue, que envolvem convergência de integrais. Lembramos que teoremas análogos para a integral de Riemann requerem muito mais hipóteses, e têm demonstrações consideravelmente mais complicadas.

Teorema 3.16 (Teorema da Convergência Monótona)**.** Suponha E mensurável,$f_n\colon X \to \mathbb{R}$ e $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots$ para cada $x \in E$. Seja ainda f definida por$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para $x \in E$. Então

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu \text{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração: Quando $n \to \infty$ temos $\int_E f_n d\mu \to \alpha$, para algum α, pois temos uma sequência crescente de números reais (note que α pode ser $+\infty$). Como $f_n \leqslant f$ para cada n, temos $\int_E f_n d\mu \leqslant \int_E f d\mu$, então $\alpha \leqslant \int_E f d\mu$.

Sejam agora $0 < c < 1$ e s uma função simples e mensurável, satisfazendo $0 \leqslant s \leqslant f$. Defina assim $E_n = \{x \in E\colon f_n(x) \geqslant cs(x)\}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Notemos que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. De fato, como $f_{n+1} \geqslant f_n$, se $x \in E_n$ temos $f_n(x) \geqslant cs(x)$ e então $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) \geqslant cs(x)$, o que mostra que $x \in E_{n+1}$. Ainda, como $f_n(x) \to f(x)$ temos $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, pois dado $x \in E$, se $f(x) = \infty$ então existe n tal que $f_n(x) \geqslant cs(x)$. Já se $f(x) < +\infty$ como $cs(x) < f(x)$ existe n tal que $cs(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$. Segue então que

$$\int_E f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} cs d\mu = c \int_{E_n} s d\mu, \tag{3.1}$$

para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$. Fazendo $n \to \infty$ em (3.1), como a integral σ-aditiva pelo Teorema 3.8, concluímos que $\alpha \geqslant c \int_E s d\mu$, usando o Teorema 2.20.

Fazendo agora $c \to 1^-$ temos $\alpha \geqslant \int_E s d\mu = I_E(s)$, e como $\int_E f d\mu = \sup(I_E(s))$ segue que $\int_E f d\mu \leqslant \alpha$. Assim $\int_E f d\mu = \alpha$, o que conclui a demonstração. ∎

Um dos pontos interessantes a se notar aqui é que ainda não mostramos a linearidade da integral com respeito á soma de funções. Nesta altura então vale notar a diferença entre as integrais de Lebesgue de de Riemann. A linearidade na integral de Riemann é uma consequência praticamente imediata de sua definição, mas aqui precisamos demonstrar o Teorema da Convergência Monótona primeiro, antes de passarmos para a linearidade, que é dada no teorema abaixo.

Teorema 3.17. Suponha $f = f_1 + f_2$, onde $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ em E. Então $f \in \mathcal{L}(\mu)$ e

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu.$$

Demonstração: Separaremos a demonstração em casos.

Caso 1: $f_1, f_2 \geqslant 0$, simples e mensuráveis.

Neste caso, escrevemos

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i} \quad \text{e} \quad f_2 = \sum_{j=1}^{m} d_j K_{F_j}.$$

Definindo $G_{i,j} = E_i \cap F_j$ e $b_{i,j} = c_i + d_j$ para $i = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$ temos

$$f_1 + f_2 = \sum_{i,j=1}^{n,m} b_{i,j} K_{G_{i,j}},$$

e assim

$$\begin{aligned}\int_E (f_1 + f_2) d\mu &= \sum_{i,j=1}^{n,m} b_{i,j} \mu(G_{ij} \cap E) = \sum_{i,j=1}^{n,m} c_i \mu(G_{ij} \cap E) + \sum_{i,j=1}^{n,m} d_j \mu(G_{ij} \cap E) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap E) + \sum_{j=1}^{m} d_j \mu(F_j \cap E) = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu.\end{aligned}$$

Caso 2: Se $f_1, f_2 \geqslant 0$ são mensuráveis.

Neste caso, pelo Teorema 3.3, existem sequências crescentes $\{s'_n\}$ e $\{s''_n\}$ de funções simples, mensuráveis e não-negativas tais que $s_n 1(x) \to f(x)$ e $s''_n(x) \to f_2(x)$, quando $n \to \infty$, para cada $x \in E$. Defina agora $s_n = s'_n + s''_n$ para cada n. Do Caso 1, para cada n, temos

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s'_n d\mu + \int_E s''_n d\mu,$$

e fazendo $n \to \infty$, o Teorema da Convergência Monótona nos dá

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu.$$

Caso 3: $f_1 \geqslant 0$ e $f_2 \leqslant 0$ são mensuráveis.

Para este caso, sejam $A = \{x \in E\colon f(x) \geqslant 0\}$ e $B = \{x \in E\colon f(x) < 0\}$. Claramente $E = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Além disso, f, f_1 e $-f_2$ não são não-negativas em A e $f_1 = f + (-f_2)$ logo aplicando o Caso 2 temos

$$\int_A f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_E f d\mu - \int_E f_2 d\mu \tag{3.2}$$

De modo análogo $-f$,f_1 e $-f_2$ não são não-negativas em B e $-f_2 = f_1 + (-f)$, logo aplicando o Caso 2, temos

$$-\int_B f_2 d\mu = \int_B f_1 d\mu - \int_B f d\mu. \tag{3.3}$$

Rearranjando os termos[1] e somando (3.2) e (3.3) segue que

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu.$$

Caso geral: f_1,$f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$.

Defina $A = \{x \in E\colon f_1, f_2 \geqslant 0\}$, $B = \{x \in E\colon f_1 \geqslant 0 \text{ e } f_2 < 0\}$, $C = \{x \in E\colon f_1 < 0 \text{ e } f_2 \geqslant 0\}$ e $D = \{x \in E\colon f_1, f_2 < 0\}$. Assim $E = A \cup B \cup C \cup D$, $A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \varnothing$, e em cada um destes conjuntos aplicamos os Casos 2 ou 3 para mostrar que

$$\int_J f d\mu = \int_j f_1 d\mu + \int_J f_2 d\mu \text{ para } J = A, B, C, D,$$

e somando estas identidades concluímos a prova deste teorema. ∎

Teorema 3.18. Suponhamos $E \in \mathcal{M}$. Se $f_n\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ e $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas e $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para $x \in E$, então

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Demonstração: Para cada $n \geqslant 1$, defina

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \text{ para cada } x \in E.$$

Como $f_n \geqslant 0$, segue que $\{S_n\}$ é uma sequência crescente de funções mensuráveis com $S_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para cada $x \in E$. Ainda, o Teorema 3.17 nos dá

$$\int_E S_n d\mu = \int_E \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_E f_k d\mu.$$

[1] Lembre que $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ por hipótese, e assim todas as integrais envolvidas são finitas.

Fazendo $n \to \infty$, como $\int_E S_n d\mu \to \displaystyle\int_E f d\mu$ pelo Teorema da Convergência Montótona, segue que

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

■

O seguinte teorema é um recurso teórico que utilizaremos para a obtenção do segundo teorema sobre convergência de integrais de Lebesgue.

Teorema 3.19 (Teorema de Fatou)**.** Sejam E mensurável e $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas e tome

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para cada } x \in E.$$

Então

$$\int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{3.4}$$

Demonstração: Para cada $n \geqslant 1$, defina $g_n(x) = \inf\limits_{i \geqslant n} f_i(x)$ para cada $x \in E$. Pelo Teorema 2.37, $g_n(x)$ definida desta maneira é mensurável. Perceba ainda que $0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant ...$ e que $g_n(x) \leqslant f_n(x)$ para cada n.

Então temos $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ou seja $g_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in E$. Assim podemos aplicar o Teorema da Convergência Montótona para concluir que

$$\int_E g_n(x) d\mu \to \int_E f(x) d\mu.$$

Como $\int_E g_n d\mu \leqslant \int_E f_n d\mu$, calculando agora em ambos os membros o $\liminf\limits_{n\to\infty}$ segue que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

e como $\liminf\limits_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \displaystyle\int_E f d\mu$ obtemos

$$\int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

■

Observamos agora que a desigualdade em (3.4) pode ser estrita. Para isso, sejam $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ o σ-anel dos conjuntos Lebesgue mensuráveis, $\mu = m$ a medida de Lebesgue e $E = [0, 1]$. Defina

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Defina para cada $k \geqslant 1$ a função

$$f_{2k}(x) = g(x) \quad \text{e} \quad f_{2k+1}(x) = g(1 - x) \text{ para cada } x \in E.$$

Então $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ para todo $x \in E$, mas

$$\int_E f_n dm = \tfrac{1}{2} \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Assim

$$0 = \int_E f dm < \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \tfrac{1}{2}.$$

O teorema abaixo é o mais importante no que diz respeito á integral de Lebesgue e convergência de integrais.

Teorema 3.20 (Torema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** Sejam E um conjunto mensurável e $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$ para cada $x \in E$. Se existe uma função $g \in \mathcal{L}(\mu)$ em E tal que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ para todo $n \geqslant 1$ e todo $x \in E$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Demonstração: Como $|f_n| \leqslant g$ e $g \in \mathcal{L}(\mu)$, segue do Lema 3.15 que $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ para cada $n \geqslant 1$. Ainda como $f_n \to f$, segue que $|f| \leqslant g$ e novamente pelo Lema 3.15 segue que $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Como $|f_n| \leqslant g$, temos $-f_n \leqslant |f_n| \leqslant g$ e assim $f_n + g \geqslant 0$. Pelo Teorema de Fatou temos

$$\int_E (f+g)d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g)d\mu,$$

o que implica (lembre que $\int_E g d\mu$ é finito) que

$$\int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{3.5}$$

Também $f_n \leqslant |f_n| \leqslant g$, e assim $g - f_n \geqslant 0$ e analogamente

$$\int_E (g-f)d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n)d\mu,$$

pelo Teorema de Fatou, o que implica em

$$-\int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_E f_n d\mu \right),$$

logo

$$\int_E f d\mu \geqslant - \liminf_{n\to\infty} \left(- \int_E f_n d\mu \right),$$

e portanto

$$\int_E f d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{3.6}$$

Segue assim de (3.5) e (3.6) que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leqslant \int_E f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Então $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$ existe e

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

■

Corolário 3.21. *Se $\mu(E) < +\infty$, $\{f_n\}$ uma sequência de funções uniformemente limitadas em E (isto é, existe $M \geqslant 0$ tal que $|f_n(x)| \leqslant M$ para todo $n \geqslant 1$ e $x \in E$), e se $f_n(x) \to f(x)$ em E, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Demonstração: Segue do Teorema do Convergência Dominada de Lebesgue com $g(x) = M$ para todo $x \in E$, notando que $g \in \mathcal{L}(\mu)$ pois

$$\int_E g d\mu = M\mu(E) < \infty +,$$

pois $\mu(E) < +\infty$. ■

4 Integral de Lebesgue x Integral de Riemann

Neste último capítulo, mostraremos que a integral de Lebesgue é uma generalização da integral de Riemann. Tal generalização é bem mais robusta, pois limites(no sentido de convergência pontual) de funções Riemann integráveis podem não ser Riemann integrável. Além dos teoremas do convergência serem muito mais simples para a integral de Lebesgue, mostraremos que temos uma classe muito maior de funções integráveis no sentido de Lebesgue do que no sentido de Riemann.

Para o próximo teorema consideraremos como nosso espaço de medida o intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, com $\mu = m$ (ou seja, a medida de Lebesgue) e $\mathcal{M}$ como a família de todos os subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $[a, b]$. Ao invés de escrevermos $\int_X f dm$, usaremos a notação $\int_a^b f dm$ para a integral de Lebesgue de f em $[a, b]$. Para fazer a diferenciação entre a integral de Lebesgue e de Riemann usaremos $\mathcal{R} \int_a^b f dx$ para integral de Riemann[1] de f.

Para mais detalhes sobre os resultados envolvendo a integral de Riemann, sugerimos que o leitor consulte [3, Capítulo 6].

O teorema que apresentaremos neste capítulo é o seguinte.

Teorema 4.1. Se f é Riemann integrável em $[a, b]$, então f é Lebesgue integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f dm = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

Antes de demonstrar este teorema, apresentaremos somente o conceito de função Riemann integrável. Dizemos que uma **partição** ou **divisão** de $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$ tal que

$$P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Para cada partição $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ de $[a, b]$, escreve-se

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1} \text{ para } i = 1, \cdots, n,$$

e

$$\Delta(P) = \max_{i=1,\ldots,n} (\Delta_i).$$

O valor $\Delta(P)$ é chamado de **norma da partição** P. Uma partição Q de $[a, b]$ é dita um **refinamento** de outra partição P de $[a, b]$ se $P \subset Q$, isto é, todos os pontos de P aparecem em Q.

[1] Veja Definição 4.2.

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada qualquer e P uma partição de $[a,b]$ qualquer. Define-se:

$$m_i = \inf\{f(x)\colon x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \sup\{f(x)\colon x \in [t_{i-1}, t_i]\},$$

para cada $i = 1, ..., n$.

A **soma inferior** de f em P é definida por

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i,$$

e a **soma superior** de f em P é definida por

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i.$$

A **integral inferior** da função real limitada f em $[a,b]$ é dada por

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f dx = \sup\{L(P,f)\colon P \text{ é partição qualquer de } [a,b]\}$$

e a **integral superior** da função real limitada f em $[a,b]$ é dada por

$$\mathcal{R}\overline{\int_a^b} f dx = \inf\{U(P,f)\colon P \text{ é partição qualquer de } [a,b]\}.$$

Definição 4.2. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é **Riemann integrável** em $[a,b]$ se*

$$\mathcal{R}\underline{\int_a^b} f dx = \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f dx.$$

*O valor comum da igualdade acima é denotado por $\mathcal{R}\int_a^b f dx$ e este valor é chamado de **integral de Riemann** de f em $[a,b]$.*

Precisaremos antes de um lema técnico.

Lema 4.3. *Sejam X um espaço mensurável, com σ-anel $\mathcal{M}$ e medida μ. Se f é uma função mensurável e $f(x) = g(x)$ em quase todo X, então g também é mensurável.*

Demonstração: Seja $A = \{x \in X\colon f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótese temos A mensurável com $\mu(A) = 0$. Para $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\{x \in X\colon g(x) > a\} = \{x \in X\colon f(x) > a\} \cup B,$$

onde $B = \{x \in X\colon f(x) \neq g(x) \text{ e } g(x) > a\}$. Como $B \subset A$ e $\mu(A) = 0$, segue que B é mensurável e $\mu(B) = 0$. Assim, $\{x \in X\colon g(x) > a\}$ é mensurável, o que mostra que g é mensurável. ∎

Podemos agora apresentar a demostração do Teorema 4.1.

Demonstração do Teorema 4.1: Suponha que f seja limitada em $[a,b]$. Defina assim $\{P_k\}$ uma sequência de partições de $[a,b]$, em que P_{k+1} é um refinamento da partição P_k, com $\Delta(P_k) < \frac{1}{k}$ para todo $k \geqslant 1$.

Escrevendo $P_k = \{t_{i,k}\}_{i=0}^{n_k}$, vamos definir funções $U_k, L_k \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira: $U_k(a) = L_k(a) = f(a)$ e

$$U_k(x) = M_{i,k} = \sup_{x\in[t_{i-1,k},t_{i,k}]} f(x) \quad \text{e} \quad L_k(x) = m_{i,k} = \inf_{x\in[t_{i-1,k},t_{i,k}]} f(x),$$

se $x \in (t_{i-1,k}, t_{i,k}]$. Denotemos aqui $\Delta_{i,k} = t_{i,k} - t_{i-1,k}$, para cada $i = 1, ..., n_k$ e $k \geqslant 1$.

<u>Afirmação 1:</u> U_k e L_k são funções simples para cada $k \geqslant 1$.

De fato, note que

$$U_k(x) = \begin{cases} f(a), & \text{se } x = a \\ M_{i,k} & \text{se } t_{i-1,k} < x \leqslant t_{i,k},\ i = 1, 2, ..., n_k., \end{cases}$$

e definindo $c_{0,k} = f(a)$, $E_{0,k} = \{a\}$, $c_{i,k} = M_{i,k}$ e $E_{i,k} = (t_{i-1,k}, t_{i,k}]$ para $i = 1, 2, ...n_k$, vemos que $U_k = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i K_{E_i}$, e portanto U_k é uma função simples.

Analogamente para L_k, tomando $c_{i,k} = m_{i,k}$ para $i = 1, ..., n_k$.

<u>Afirmação 2:</u> $U(P_k, f) = \int\limits_a^b U_k dm$ e $L(P_k, f) = \int\limits_a^b L_k dm$ para cada $k \geqslant 1$.

Como U_K é uma função simples temos:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b U_k dm &= \sum_{i=0}^{n} c_{i,k} m(E_{i,k}) = c_0 m(E_0) + \sum_{i=1}^{n_k} c_{i,k} m(E_{i,k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} c_{i,k} m(E_{i,k}) = \sum_{i=1}^{n_k} M_{i,k} \Delta_{i,k} i = U(P_k, f) \end{aligned}$$

pois $m(E_0) = 0$ e $m(E_{i,k}) = t_{i,k} - t_{i-1,k} = \Delta_{i,k}$. Analogamente para L_k.

Agora, para cada $k \geqslant 1$, como P_{k+1} é um refinamento de P_k temos

$$U_k(x) \geqslant U_{k+1}(x) \geqslant f(x) \geqslant L_{k+1}(x) \geqslant L_k(x) \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Assim $\{U_k(x)\}$ é uma sequência decrescente limitada inferiormente por $f(x)$ e $\{L_k(x)\}$ é uma sequência crescente limitada superiormente por $f(x)$, o que nos permite definir

$$U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x) \quad \text{e} \quad L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x) \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Note que U e L definidas desta maneira são funções mensuráveis em $[a,b]$, com $L(x) \leqslant f(x) \leqslant U(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona para a sequência $\{U_1 - U_k\}$ de funções mensuráveis, não-negativa e crescente, temos

$$\int_a^b (U_1 - U)dm = \lim_{k\to\infty} \int_a^b (U_1 - U_k)dm,$$

o que nos dá $\displaystyle\int_a^b Udm = \lim_{k\to\infty} \int_a^b U_k dm$. Analogamente, mostramos que $\displaystyle\int_a^b Ldm = \lim_{k\to\infty} \int_a^b L_k dm$.

Como $\Delta(P_k) \to 0$ quando $k \to \infty$, os resultados de [3, Capítulo 6] nos garantem que

$$\lim_{k\to\infty} U(P_k, f) = \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f dx \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} L(P_k, f) = \mathcal{R}\underline{\int_a^b} f dx.$$

Assim, sabemos que uma função f é Riemann integrável se, e somente se, suas somas superior e inferior forem iguais, e pela Afirmação 2, isso ocorre se, se somente se,

$$\int_a^b Ldm = \int_a^b Udm.$$

Neste caso temos $\int_a^b Ldm = \int_a^b Udm = \mathcal{R}\int_a^b f dx$, e assim, $\int_a^b (U - L)dm = 0$, e obtemos pela Proposição 3.14 que $U = L$ em quase todo $[a,b]$. Como $L(x) \leqslant f(x) \leqslant U(x)$ em $[a,b]$, concluímos que $L(x) = U(x) = f(x)$ em quase todo $[a,b]$.

Então como L e U são funções mensuráveis, pois são limites de funções mensuráveis, podemos concluir, do Lema 4.3, que f também é mensurável, e portanto f é Lebesgue integrável e

$$\int\limits_a^b f dm = \mathcal{R}\int\limits_a^b f dx.$$

$\blacksquare$

Corolário 4.4. *Suponhamos f limitada em $[a,b]$. Então f é Riemann integrável em $[a,b]$ se, e somente se, f é contínua em quase todo $[a,b]$.*

Demonstração: Usando as notações do teorema anterior, vemos que se x não está em nenhuma partição P_k, isto é, $x \in [a,b] - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, então f é contínua em x se, e somente se, $L(x) = U(x)$. Além disso, como $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ é uma coleção enumerável de pontos, temos $m(B) = 0$, pois

$$m(B) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} y_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\{y_n\}) = 0.$$

Portanto, do que fizemos no teorema acima, obtemos que f é Riemann integrável se, e somente se, f é contínua em quase todo $[a, b]$. ∎

Este último resultado traz sentido ao estudo da integração de Lebesgue, e mostra que a integral de Lebesgue é mais forte no sentido teórico e de aplicações do que a integral de Riemann.

Notamos que o exemplo clássico de função que é Lebesgue integrável e não Riemann integrável é a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então função é nula em quase todo $\mathbb{R}$, já que $m(\mathbb{Q}) = 0$, e portanto $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f dm = 0$. Mas pelo último corolário vemos que f não é Riemann integrável.

Para uma leitura mais cuidadosa sobre esta comparação, sugerimos ao leitor que veja [4]. Para mais aplicações (que são muitas) da integral de Lebesgue, sugerimos também a leitura de [1] e de [3].

Referências

[1] Hönig, C.S.: *A integral de Lebesgue e suas aplicações*, IMPA (1977). Citado na página 53.

[2] Royden, H.L., Fitzpatrick, P.M.: *Real Analysis*, 4ª ed., China Machine Press (2010). Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.

[3] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 3ª ed., McGraw-Hill Inc. (1976). Citado 4 vezes nas páginas 11, 49, 52 e 53.

[4] Leidyanna, J.G.: *Da Integral de Riemann para a Integral de Lebesgue*, 2012. 63 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas (Icex), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012. Citado na página 53.